Vorlesung Sprachverarbeitung, Übung 4

1. Signalschätzung

   (a) Gegeben sei ein Signal $x(n)$, das aus einem AR-Prozess stammt.

   $$\begin{array}{lll} x(0) = 1,00 & x(1) = -0,75 & x(2) = -0,1042 \\ x(3) = 0,0781 & x(4) = 0,3859 & \end{array}$$

   Außerdem liegen bereits die Prädiktor-Koeffizienten verschiedener Ordnungen vor:

   $$\begin{array}{lllll} \text{1. Ordnung:} & a_1 = -0,4 & & & \\ \text{2. Ordnung:} & a_1 = -0,5556 & a_2 = -0,3889 & & \\ \text{4. Ordnung:} & a_1 = -0,75 & a_2 = -0,6667 & a_3 = -0,5 & a_4 = 0,0 \end{array}$$

   (b) Berechnen Sie mit Hilfe der Prädiktor-Koeffizienten 1ter, 2ter und 4ter Ordnung die Funktionswerte für die Funktion $y(n)$, wobei $y(0) = 1$.

   (c) Skizzieren Sie $x(n)$ und $y(n)$ (für jede Ordnung) und berechnen Sie den Fehler $e(n)$ zwischen $x(n)$ und $y(n)$

   (d) Welche Ordnung hatte wahrscheinlich der ursprüngliche AR-Prozess, aus dem $x(n)$ entstanden ist?

2. Hauptachsentransformation

   (a) Gegeben sind die folgenden Datenwerte der Klassen K_1 und K_2:

   $$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \; x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \; y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   (b) Skizzieren Sie die Verteilungen und berechnen Sie die Klassenmittelwerte M_1,M_2 sowie den Gesamtmittelwert M_0.

   (c) Berechnen Sie die Kovarianzmatrix C und ermitteln Sie die Eigenwerte.

   (d) Transformieren Sie die Daten mit Hilfe des Eigenvektors zum größten Eigenwert in den eindimensionalen Raum. Interpretieren Sie ihre Ergebnisse.

3. Lineare Diskriminanz Analyse

   (a) Schätzen Sie die Kovarianzmatrizen S_W und S_T mit den Daten aus der vorangegangenen Aufgabe.

   (b) Berechnen Sie die LDA-Matrix und transformieren Sie die Daten in den eindimensionalen Raum.

   (c) Vergleichen Sie ihre Resultate mit der Hauptachsentransformation.

Anhang

Hauptachsentransformation

Die Kovarianzmatrix C ergibt sich für eine zentrierte Verteilung der Vektoren $\mathbf{x}$ zu

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i^T$$

Formeln zur Linearen Diskriminanz Analyse

$$S_W = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{J} N_j \cdot W_j \quad \text{mit} \quad W_j = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} (x_{i,j} - m_j)\,(x_{i,j} - m_j)^T$$

$$S_B = \sum_{j=1}^{J} \frac{N_j}{N} (m_j - m_0)\,(m_j - m_0)^T$$

$$S_T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - m_0)\,(x_i - m_0)^T$$

Bestimmung der LDA-Matrix Θ: $S_W^{-1} S_T \Theta = \Theta \Lambda$
Transformation mit der LDA-Matrix Θ: $Y = \Theta^T X$

sonstiges:

1. **Eigenwerte und Eigenvektoren**
   Für alle Eigenwerte λ der Matrix A gilt:

   $$det(A - \lambda E_n) = 0$$

   Ist λ ein Eigenwert der Matrix A, so wird der zugehörige Eigenvektor $\mathbf{x}$ bestimmt durch:

   $$(A - \lambda E_n)\mathbf{x} = 0$$

2. **Inverse Matrix**
   Die Inverse einer quadratischen Matrix A wird beschrieben durch:

   $$A \cdot A^{-1} = E$$