Computational Neuroscience II
Übung 4
Rescorla-Wagner-Regel

Datum der Übung: 08.06.2017
Abgabefrist: Do, 22.06.2017, 11.00 Uhr

6. Juni 2017

1 Motivation

Bei klassischer Konditionierung erfährt ein Versuchstier eine Folge diskreter Stimuli und Belohnungen. Durch Ausbildung von Assoziationen zwischen Stimuli und Belohnungen generiert das Versuchstier bald *Erwartungen* über potentielle zukünftige Belohnungen. Gelegentlich macht sich diese Erwartung auf der Verhaltensebene bemerkbar, z.B. durch Speichelbildung oder durch Lecken.

Die Rescorla-Wagner-Regel bietet eine prägnante Beschreibung vieler (nicht aller!) klassischer Konditionierungsexperimente. Sie werden in dieser Übung die Rescorla-Wagner-Regel in einer Situation implementieren, in der zwei Stimuli auf unabhängige Weise entweder anwesend oder abwesend sind.

2 Zwei unabhängige Stimuli

Betrachten Sie zwei Stimuli A und B, die unabhängig voneinander entweder anwesend oder abwesend sind, und zwar anwesend mit den Wahrscheinlichkeiten p_A und p_B, respektive, und folglich abwesend mit den respektiven Wahrscheinlichkeiten $1 - p_A$ und $1 - p_B$. Die Tabelle der Wahrscheinlichkeiten lautet dann

	A	$\neg A$	
B	$p_A\, p_B$	$(1 - p_A)\, p_B$	p_B
$\neg B$	$p_A\,(1 - p_B)$	$(1 - p_A)\,(1 - p_B)$	$1 - p_B$
	p_A	$1 - p_A$	1

Vervollständigen Sie die Wahrscheinlichkeitstabelle in dem Spezialfall $p_A = 1/3$ and $p_B = 1/5$! Benutzen Sie diese Werte auch in den unten beschriebenen Simulationsaufgaben!

Um das Vorhandensein oder die Abwesenheit der beiden Stimuli mathematisch zu beschreiben, führen wir einen zweidimensionalen Vektor $\mathbf{u}$ ein. Die Komponenten dieses Vektors sind jedeweils 0 oder 1 und zeigen so an, ob der erste Stimulus erschien (erste Komponente) und ob der zweite Stimulus erschien (zweite Komponente).

Berechnen Sie den Vektor der Erwartungswerte $\langle \mathbf{u} \rangle$ und die Korrelationsmatrix $\langle \mathbf{u}\,\mathbf{u} \rangle = \begin{pmatrix} \langle u_1^2 \rangle & \langle u_1\,u_2 \rangle \\ \langle u_1\,u_2 \rangle & \langle u_2^2 \rangle \end{pmatrix}$, sowie die inverse Matrix der Korrelationsmatrix $\langle \mathbf{u}\,\mathbf{u} \rangle^{-\mathbf{1}}$! Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mit der Matlab-Funktion **inv**!

3 Vollständige Konditionierung

Unter der Annahme, dass eine Belohnung $r = 1$ erfolgt genau dann, wenn der Stimulus A vorhanden ist (unabhängig von Stimulus B), ergeben sich die Tabellen der gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten für alle Fälle der drei „Zufallsvariablen“ zu

$r = 1$	A	$\neg A$	
B	$p_A\,p_B$	0	$p_A\,p_B$
$\neg B$	$p_A\,(1 - p_B)$	0	$p_A\,(1 - p_B)$
	p_A	0	p_A

im Falle, dass eine Belohnung erfolgt, und zu

$r = 0$	A	$\neg A$	
B	0	$(1 - p_A)p_B$	$(1 - p_A)\,p_B$
$\neg B$	0	$(1 - p_A)(1 - p_B)$	$(1 - p_A)\,(1 - p_B)$
	0	$1 - p_A$	$1 - p_A$

im Falle, dass keine Belohnung erfolgt.

Berechnen Sie auf Grundlage dieser Tabellen die Erwartungswerte

$$\langle r\,\mathbf{u} \rangle$$

und die bedingte Wahrscheinlichkeit der Belohnung bei gegebenem Stimulus

$$\langle r|\mathbf{u} \rangle$$

und die spezifische Belohnungserwartung, wie sie von der Rescorla-Wagner-Regel vorhergesagt wird:

$$\mathbf{w_{ss}} = \langle \mathbf{u}\,\mathbf{u} \rangle^{-\mathbf{1}} \cdot \langle r\,\mathbf{u} \rangle$$

Warum sind $\langle r|\mathbf{u} \rangle$ und $\mathbf{w_{ss}}$ nicht gleich? Erläutern Sie den Grund für den Unterschied!

Wenden Sie die Rescorla-Wagner-Regel iterativ auf den Fall des Lernens von Belohnungserwartungen an! Generieren Sie zu diesem Zwecke 100[1] Stimulusvektoren $\mathbf{u_i}$ und die zugehörigen Belohnungen r_i! Mit $\mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ beginnend, berechnen Sie für jeden Durchgang i den Vorhersagefehler

[1]Das nur für den Anfang. Spielen Sie später etwas mit dieser Zahl herum, um zu beobachten, wie sie die „Konvergenz“ beeinflusst. Das selbe gilt für ϵ. Mit anderen Worten, diese Parameter müssen geeigent gewählt werden, damit die „Konvergenz“ gut sichtbar ist. Nämlich wie!?

$$\delta_i = r_i - \boldsymbol{w}_{i-1} \cdot \mathbf{u_i}$$

und passen Sie die Belohnungserwartung gemäß

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_{i-1} + \epsilon\, \mathbf{u_i}\, \delta_\mathbf{i}$$

an, wobei $\epsilon = 0.05$ die Lernrate ist! Plotten Sie schließlich die zeitliche Entwicklung der Belohnungserwartungen $w_{1,2}$ und überzeugen Sie sich, dass sie zu den erwarteten Werten konvergieren[2]!

4 Partielle Konditionierung

Unter der Annahme, dass eine Belohnung ($r = 1$) mit Wahrscheinlichkeit $p_r = 1/2$ erfolgt, wenn der Stimulus A vorhanden ist (unabhängig von B), wenden Sie die Rescorla-Wagner-Regel erneut iterativ an auf das Problem des Erlernens von Belohnungserwartungen. Wie zuvor schon, generieren Sie Stimulusvektoren und die ihnen zugeordneten Belohnungen und passen Sie die Belohnungserwartung nach jedem Schritt an!

Plotten Sie die zeitliche Entwicklung und zeigen Sie, dass die Belohnungserwartungen gegen $\mathbf{w} \to \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ konvergieren!

5 Inhibitorische Konditionierung

Wenden Sie die Rescorla-Wagner-Regel iterativ auf das Erlernen von Belohnungserwartungen an, und zwar diesmal unter der Annahme, dass eine Belohnung $r = 1$ mit Wahrscheinlichkeit $p_r = 1$ erfolgt, genau dann wenn Stimulus A vorhanden ist, *und gleichzeitig* Stimulus B *nicht* da ist! Generieren Sie wie zuvor Stimulusvektoren und die ihnen zugeordneten Belohnungen und passen Sie die Belohnungserwartung nach jedem Schritt an!

Plotten Sie die zeitliche Entwicklung der Belohnungserwartungen und überzeugen Sie sich davon, dass sie gegen den erwarteten Wert $\mathbf{w} \to \begin{pmatrix} 6/7 \\ -2/7 \end{pmatrix}$ konvergieren!

[2] Es liegt allerdings keine Konvergenz im Sinne der Analysis vor, nur eine starke „Annäherung". Wir benutzen dennoch hier und weiter unten den Begriff „Konvergenz".