Computational Neuroscience II
Übung 03
Okulare Dominanz

M.Sc. Juliane Höbel-Müller
Geb. 03, R. 322
Juliane.Hoebel@ovgu.de

Inhalt

- Einordnung in die Vorlesung
- Begriff: Synaptische Plastizität
- Hebbsches Lernen
- Regeln zur synaptischen Modifizierung
- Vorstellung des Übungsblattes (Abgabefrist: **7.6.18, 11 Uhr**)

Einordnung in die Vorlesung

- **Synaptische Plastizität** und Lernen (Vorlesungsfolie 76 ff.)
- **Unüberwachtes Lernen**

- **Synaptische Plastizität** (Form der neuronalen Plastizität)

→ Beschränkung auf die synaptischen Endigungen (Synapsen)

→ Langsame Veränderung der synaptischen Stärke über die Zeit

- Basisphänomen beim Lernen und Gedächtnis
- Grundlage der Forschung: **Hebbsche Regel**

Hebbsches Lernen I

- **Donald Hebbs** Vermutung (1949): Wenn der Input eines Neurons A oft dazu beiträgt, dass Neuron B feuert, dann wird die synaptische Stärke von A nach B erhöht.

- Allg.: Änderung **Hebbscher Synapsen** ist proportional zur Korrelation der Aktivitäten der prä-/ postsynaptischen Neurone

$$\Delta w \propto A(t)B(t)$$

Hebbsches Lernen II

- Probleme:
  - Unbegrenztes Wachstum der synaptischen Stärke
  - Sinkende postsynaptische Selektivität

- Möglichkeiten zur Korrektur der Hebbschen Regel:
  - **Synaptische Sättigung**
  - **Synaptischer Wettbewerb**

Übersicht: Regeln zur synaptischen Modifizierung

- Lineare **Feuerratengleichung**
- Grundlegende (lineare) **Hebbsche Regel**
- **Kovarianzregel**
- **Oja-Regel**

Feuerratengleichung I

$$\tau_r \frac{dv}{dt} = -v + \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u}$$

- τ_r := Zeitkonstante zur Kontrolle der Dynamik der Feuerrate
- v := Postsynaptische Aktivität
- $\boldsymbol{w}$:= Vektor der synaptischen Gewichte präsynaptischer Neurone
- $\boldsymbol{u}$:= Präsynaptische Aktivität (Mustervektor)

Feuerratengleichung II

- Synaptische Plastizität **langsamer** als Dynamik des Feuerns

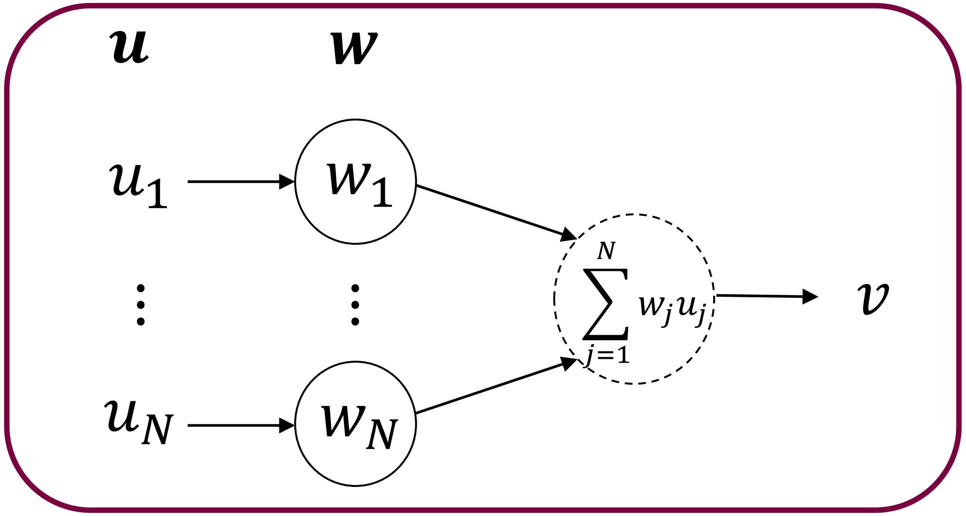
- Annahme für die Dynamik des Feuerns während des Trainings:

$$v = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}$$

- Hinweis: Skalarprodukt im $\mathbb{R}^N$ entspricht Matrizenprodukt

Feuerratengleichung III

$$v = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u}$$



Beispiel für ein zweilagiges Netz

Grundlegende Hebbsche Regel I

- Einfachste Plastizitätsregel nach Hebbs Hypothese:

$$\tau_w \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = v\boldsymbol{u}$$

- $\tau_w :=$ Zeitkonstante zur Kontrolle der Gewichtsänderung
- Approximation der langsamen Gewichtsänderungen:

$$\tau_w \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = \langle v\boldsymbol{u} \rangle$$

➢ $\langle \boldsymbol{u} \rangle = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{u}_i$ (**Mittelwert** eines Ensembles von p Mustern $\boldsymbol{u}$)

Grundlegende Hebbsche Regel II

- Durch Einsetzen der **Feuerratengleichung** ergibt sich

$$\langle v u_i \rangle = \overbrace{\underbrace{\langle \sum_{j=1}^{N} u_j}_{v = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{N} w_j u_j} u_i \rangle \, w_j}^{w_j \text{ als multiplikative Faktor betrachtet und aus } \langle .. \rangle \text{ gezogen}} \qquad \text{bzw.} \qquad \langle v \boldsymbol{u} \rangle = \underbrace{\boldsymbol{Q}\, \boldsymbol{w}}_{\text{Matrix–Vektor–Produkt, Ergebnis: Vektor}}$$

En détail: Input-Korrelationsmatrix

$$\langle v\boldsymbol{u}\rangle = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{w} = \left\langle \begin{pmatrix} u_{i=1}u_{j=1} & \cdots & u_{i=1}u_{j=N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i=N}u_{j=1} & \cdots & u_{i=N}u_{j=N} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} w_{j=1} \\ \vdots \\ w_{j=N} \end{pmatrix}$$

$$\langle v\boldsymbol{u}\rangle = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{w} = \langle \underbrace{\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}_{\text{Dyadisches Produkt}} \rangle\,\boldsymbol{w}$$

- $\boldsymbol{Q} = \langle \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \rangle$ beschreibt Korrelationen zw. den Komponenten von $\boldsymbol{u}$

➢ Definition von $\boldsymbol{Q}$ als **Input-Korrelationsmatrix**

$$\boldsymbol{Q}_{ij} = \langle \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \rangle_{ij} = \langle u_i u_j \rangle = \overbrace{\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} u_i^k u_j^k}^{\text{Mittelwertbildung über alle } p \text{ Muster}}$$

Kovarianzregel I

- Realität: Stärke der Synapsen kann nicht nur zu-, sondern auch abnehmen

- Option: Subtraktion eines präsynaptischen Schwellenwerts zur Bestimmung des Niveaus von $\boldsymbol{u}$

$$\tau_w \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = v(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\theta}_u)$$

- Hier: $\boldsymbol{\theta}_u = \langle \boldsymbol{u} \rangle$ (Vgl. Dayan & Abbott)

Kovarianzregel II

- Einsetzen der Feuerratengleichung: $v = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u}$
- Anwendung des Mittelwerts auf $v(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\theta}_u)$, wobei $\boldsymbol{\theta}_u = \langle \boldsymbol{u} \rangle$

$$\tau_w \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{w}$$

- $\boldsymbol{C}$:= Input-Kovarianzmatrix

- Induzierung eines synaptischen Wettbewerbs
- Aber: Wachstum von $\boldsymbol{w}$ wie bei linearer Hebb-Regel unbeschränkt

Hinweise zur Input-Kovarianzmatrix

- Korrelationsmatrix $\boldsymbol{Q}$ ist gleich der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C}$, wenn der Mittelwert verschwindet

$$\boldsymbol{C} = \left\langle (\boldsymbol{u} - \langle \boldsymbol{u} \rangle)(\boldsymbol{u} - \langle \boldsymbol{u} \rangle)^{\mathrm{T}} \right\rangle$$

- Die Kovarianz 2er Zufallsvariablen X und Y kann man mit dem Verschiebungssatz (Satz von Steiner) angeben:

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{E}(\mathrm{XY}) - \mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})$$

$$\boldsymbol{C} = \left\langle \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \right\rangle - \langle \boldsymbol{u} \rangle \left\langle \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \right\rangle$$

Wdhlg.: Annäherung des Mittelwerts an den Erwartungswert für unendlich viele $\boldsymbol{u}$.

Oja–Regel I

- Balancieren des Wachstums der synaptischen Stärke

➢ Nutzung eines „Vergessensterms“

- „Vergessensterm“ ist proportional zu $\boldsymbol{w}$ und v^2

$$\tau_w \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = v\,\boldsymbol{u} - \alpha v^2 \boldsymbol{w}$$

$$\tau_w \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{w} - \alpha\left(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{w}\right)\boldsymbol{w}$$

- $\alpha :=$ Lernrate

Oja-Regel II

- Ergebnis des Trainings eines Netzes mit Oja-Regel:

1) $\boldsymbol{w} \sim \boldsymbol{e}^j$, wobei $\boldsymbol{e}^j$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{C}$ mit Eigenwert λ^j ist

2) $\lambda^j = \lambda^{max}$ ist der größte Eigenwert von $\boldsymbol{C}$

3) $|\boldsymbol{w}|^2 = \frac{1}{\alpha}$

4) $\langle v^2 \rangle$ ist maximal

- Fazit: Mit der Oja-Regel findet man die **Richtung der größten Varianz** der Musterverteilung.

En détail: Beweis von 1)

- Annahme: Konvergenz des Trainings

➢ Keine Änderung von $\boldsymbol{w}$ über alle Muster des Trainingsdatensatzes:

$$\left\langle \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} \right\rangle = 0$$

- Bei Konvergenz gilt:

$$\langle v\boldsymbol{u} - v^2\boldsymbol{w} \rangle = Cw - (\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{w})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{w} - \lambda\boldsymbol{w}$$

- Dabei wird verwendet:

$$\langle v^2 \rangle = \langle (\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{u})^2 \rangle = \langle \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w} \rangle = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}$$

- Aus der vorletzten Gleichung folgt, dass $\boldsymbol{w}$ Eigenvektor von $\boldsymbol{C}$ ist:

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{w}$$

Eigenwertproblem

En détail: Beweis von 2)

- $\boldsymbol{w}$ kann in $\boldsymbol{C}$–Eigenvektorkoordinaten geschrieben werden:
- Für jede Komponente k von $\boldsymbol{w}$ gilt

$$\tau_w \frac{dw_k}{dt} = (\lambda_k - \alpha \sum_j \lambda_j \, w_j^2) w_k$$

- Summenterm ist gleich für alle k
- (..) ist maximal für größten Eigenwert λ

➢ Mit der Oja–Regel findet man die Richtung der größten Varianz der Musterverteilung.

Zusammenfassung

- Allgemeines zum Hebbschen Lernen
- Lineare **Feuerratengleichung**
- Grundlegende (lineare) **Hebbsche Regel**

- **Kovarianzregel**
  - ➢ Synaptischer Wettbewerb
  - ➢ Unbegrenztes synaptisches Wachstum
- **Oja-Regel**
  - ➢ Synaptische Sättigung
  - ➢ Synaptischer Wettbewerb

Fragen

- [Einfache Hebb-Regel] Mit welchem Problem ist die grundlegende Hebb-Regel und die Kovarianzregel verknüpft?
- [Kovarianz-Regel] Annahme: Der initiale Gewichtsvektor (t=0) beinhalte Komponenten in alle Eigenvektor-Richtungen. Charakterisieren Sie die Langzeitentwicklung des Gewichtsvektors.
- [Kovarianz-Regel] Zeigen Sie, dass die synaptischen Gewichte über die Zeit unbegrenzt wachsen.
- [Oja-Regel] Zeigen Sie, dass die Oja-Regel konvergiert.
- [Oja-Regel] Geben Sie den Lernalgorithmus (Oja-Regel) in Pseudocode an.

Übung 3: Okulare Dominanz im Hebbschen Modell

- **Okulare Dominanz**: Bevorzugung *eines* Auges durch Input-Neurone im primären visuellen Kortex

- Zwei Neurone u_L und u_R → Projektion in primären vis. Kortex
- u_L (bzw. u_R) erhält Input vom linken (bzw. rechten) Auge
- Beobachtung: Zielneuronen im prim. vis. Kortex mit häufigen Input vom selben Auge (→ ok. Dom.)
- Ziel: Nachvollziehen des Phänomens mithilfe der Kovarianz- und Oja-Regel

➢ Analyse der Entwicklung der Gewichtsvektoren über die Zeit

Übung 3: Überblick

- 1: Hintergrundinformation
- 2: Statistische Beschreibung des Inputs des linken/rechten Auges

- Beschreibung verschiedener Arten der Ausbildung synaptischer Gewichte:
- Aufgabe 3: **Kovarianzmatrix** (analytisch vs. numerisch)

- Aufgabe 4: **Kovarianzregel** (Synaptische Sättigung mithilfe eines einfachen Schwellenwertbereichs)
- Aufgabe 5: Dynamische Normierung mithilfe der **Oja-Regel**

➢ Frage nach der Ausbildung monokularer Neurone

OTTO VON GUERICKE UNIVERSITÄT MAGDEBURG

Voraussetzung für Bearbeitung der Übung

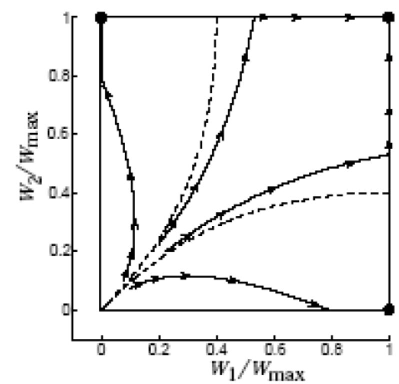
- Verständnis der Vorlesungsfolien
- Bsp. „Ocular dominance (2)“/ „Ocular dominance with saturation (3)“

Ocular dominance (2)

- If correlation between eyes is positive, $q_D > 0$. Then the principal eigenvector is $e^1 = (1,1); \lambda_1 = q_S + q_D$, representing the combined weight vector $w_R + w_L$.
- After some Hebbian Learning time, the weights will be proportional to $w_R + w_L$, whereas the other eigenvector is suppressed, i.e. $w_R - w_L \to 0$.
- This means that both eyes contribute equal innervation, so no ocular dominance occurs.
- Hebb has failed ?????

Ocular dominance with saturation (3)

- With the (biologically plausible) saturation of weights $0<w<w_{max}$, the outcome of Hebbian learning depends on the initial overlaps e*w and the products ●t:
- If „few“ time has elapsed and saturation is already reached, the outcome is rather determined by the initial overlaps than by the largest eigenvalue [here = (1,-1)]:



Aufgabe 3: Input–Kovarianz

- Berechnung der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C}$

a) Anhand *statistischer* Ensembles von (u_L, u_R) (analytisch)

b) Anhand eines zufällig generierten Ensembles $\{(u_L, u_R)\}$ (numerisch)

c) Berechnung der Eigenvektoren und –werte von $\boldsymbol{C}$

	$u_R = 1$	$u_R = 0$	
$u_L = 1$	$\gamma/4$	$1/2 - \gamma/4$	$P(u_L = 1) = 1/2$
$u_L = 0$	$1/2 - \gamma/4$	$\gamma/4$	$P(u_L = 0) = 1/2$
	$P(u_R = 1) = 1/2$	$P(u_R = 0) = 1/2$	1

Tabelle 1: Die durch γ parametrisierten Wahrscheinlichkeiten für die Paare (u_L, u_R).

- Gleiche Auftretenswahrscheinlichkeit: $\langle u_L \rangle = \langle u_R \rangle = \frac{1}{2}$

Aufgabe 3: Input–Kovarianz II

- Analytisch zu berechnende Kovarianzmatrix

➢ Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeitstabelle (Tab. 1)

$$\boldsymbol{C}_{1,2,3} = \begin{pmatrix} c_S & c_D \\ c_D & c_S \end{pmatrix},$$

$$c_S = \langle u_L u_L \rangle - \langle u_L \rangle^2 = \langle u_R u_R \rangle - \langle u_R \rangle^2$$
$$c_D = \langle u_L u_R \rangle - \langle u_L \rangle \langle u_R \rangle = \langle u_R u_L \rangle - \langle u_R \rangle \langle u_L \rangle$$

- Erklärung: $\langle u_L u_L \rangle$:= Erwartungswert für Input nur vom linken Auge

Aufgabe 4: Ausbildung von Gewichten mit Sättigung

- Modellierung synaptischer Modifizierung als **diskreten** Prozess anstelle eines kontinuierlichen Prozesses

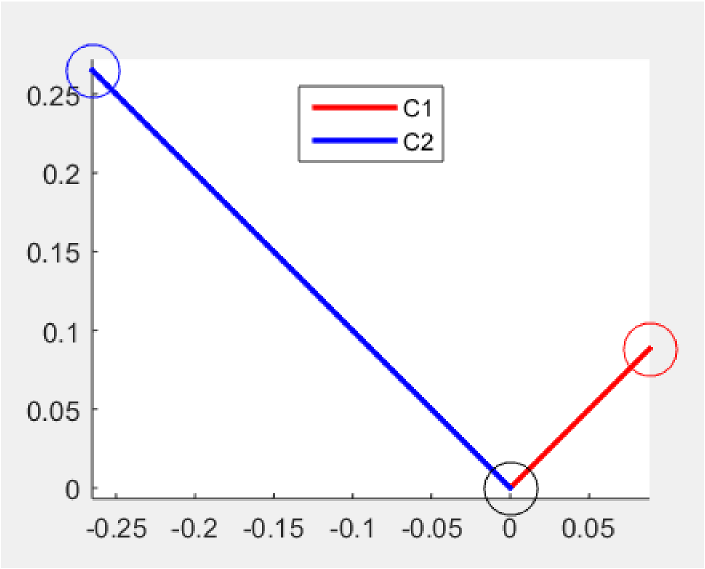
➢ Diskrete Regel zur Aktualisierung von $\boldsymbol{w}$:

$$\boldsymbol{w}_{i+1} = \boldsymbol{w}_i + \epsilon\, \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{w}_i$$

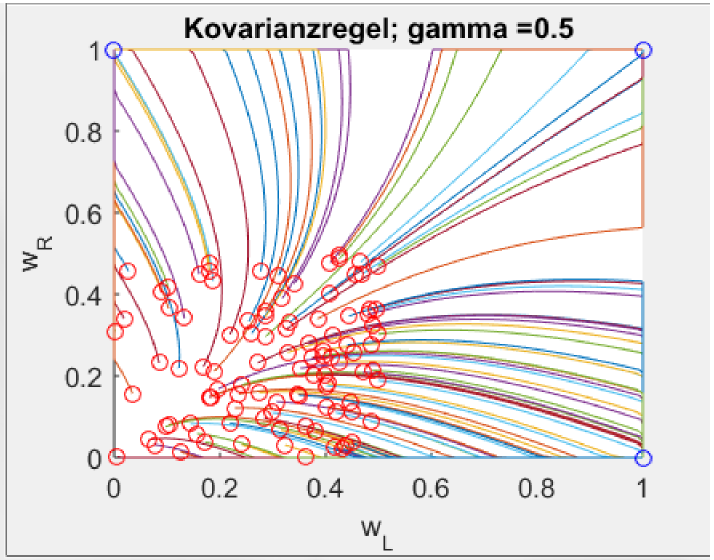
- ϵ := Parameter analog zur Lernrate
- In eurem Matlab-Skript: $\epsilon = \frac{dt}{\tau_w}$

Aufgabe 4: Ausbildung von Gewichten mit Sättigung

- Anwendung der **Kovarianzregel**



Eigenvektoren von $C_{\gamma=0.5}$



Entwicklung synaptischer Gewichte

Aufgabe 4: Ausbildung von Gewichten mit Sättigung

- Anfangsbedingungen := rote Kreise
- Endwerte (Sättigung) := blaue Kreise

- Hebbsches Lernen abhängig von initialen Überlappungen der Zustandsverbindungen mit den Eigenvektoren

- Wie entwickeln sich die Kurven hinsichtlich γ und der Beziehung zw. w_L und w_R?

- Welche (w_L, w_R) entwickeln sich *nicht* entlang des Haupteigenvektors? Warum?

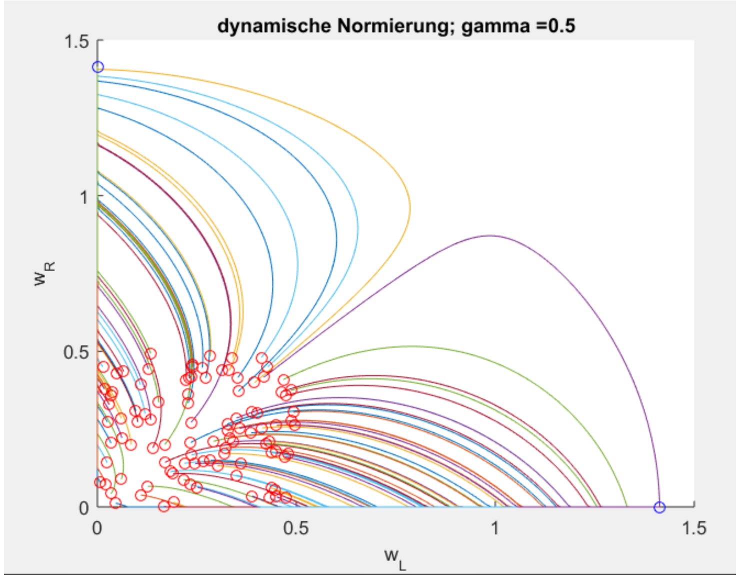
Aufgabe 5: Ausbildung von Gewichten mit dynamischer Normierung

- Diskrete Regel zur Aktualisierung von $\boldsymbol{w}$:

$$\boldsymbol{w}_{i+1} = \boldsymbol{w}_i + \epsilon\,(\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{w}_i - \alpha(\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i)$$

$$\epsilon = \frac{dt}{\tau_w}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$



Entwicklung synaptischer Gewichte bei Anwendung der **Oja-Regel**

Hinweis zum Erstellen der Plots

- Anwendung der Matlab-Funktion *scatter*

➢ Doku: https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/scatter.html

```
% Visualisierung der zeitlichen Entwicklung der Verbindungszustaende
figure(2);
hold on;
% P Kurven
for l=1:P
    % Zeichne P Kurven
    plot([illegible],[illegible]);
    % Zeichne die Anfangsbedingungen (rote Kreise)
    scatter([illegible],[illegible],'r');
    % Zeichne die Endwert (blaube Kreise)
    scatter([illegible],[illegible],'b');
end
xlabel('w_L');
ylabel('w_R');
s=strcat('Kovarianzregel; gamma = ', num2str(gamma));
title(s);
```

Auszug: Matlab-Code zur Zeichnung des Prozesses der synaptischen Modifizierung

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!

Referenzen:
→ Vorlesung CNS II
→ Buch Theoretical Neuroscience (Dayan & Abbott)