Computational Neuroscience II
Übung 3: Die Ausbildung okularer Dominanz

Datum der Übung: Mo, 22.05.2017
Abgabefrist: Do, 08.06.2017

18. Mai 2017

1 Motivation

Das Projektionsmuster von neuronalen Verbindungen, welches für neuronale Selektivität und kortikale Karten verantwortlich ist, wird während der Embryonalentwicklung durch sowohl aktivitäts*abhängige* als auch aktivitäts*un*abhängige Prozesse erzeugt. Während aktivitäts*unabhängige* Mechanismen das anfängliche Wachstums von Axonen steuern, verfeinern aktivitäts*abhängige* Mechanismen die Projektionsmuster durch massives Ausdünnen.
Unter Verwendung von unbeaufsichtigtem Hebbschen Lernen werden Sie in dieser Übung die Ausbildung von okularer Dominanz durch selektive Ausdünnung der neuronalen Projektionen nachvollziehen.

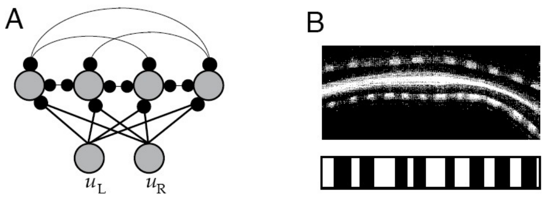

Figure 8.7: The development of ocular dominance in a Hebbian model. A) The simplified model in which right- and left- eye inputs from a single retinal location drive an array of cortical neurons. B) Ocular dominance maps. The upper panel shows an area of cat primary visual cortex radioactively labeled to distinguish regions activated by one eye or the other. The light and dark areas along the cortical regions at the top and bottom indicate alternating right- and left-eye innervation. The central region is white matter where fibers are not segregated by ocular dominance. The lower panel shows the pattern of innervation for a 512 unit model after Hebbian development. White and black regions denote units dominated by right- and left-eye projections respectively. (B data of S LeVay adapted from Nicholls *et al*, 1992.)

2 Der Input des linken und des rechten Auges

Wir betrachten die Aktivitäten zweier Afferenzen des LGN (*nucleus geniculatus lateralis*), die respektive vom linken bzw. rechten Auge entspringen: u_L und u_R. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass beide Aktivitäten *binär* sind, also nur die Werte „0“ und „1“ annehmen können, und zwar diese beiden Werte mit *gleicher* Wahrscheinlichkeit, sodass die Durchschnittswerte als $\langle u_L \rangle = \langle u_R \rangle = 1/2$ angegeben werden können.
Wir betrachten (statistische) Ensemble von Input-Paaren (u_L, u_R) mit unterschiedlichen Arten von Korrelationen. Dies wird bewerkstelligt durch die folgende – durch γ parametrisierte – Tabelle von Wahrscheinlichkeiten, die die Wahrscheinlichkeiten für die vier möglichen Werte des Paares (u_L, u_R) angibt:

	$u_R = 1$	$u_R = 0$	p_L
$u_L = 1$	$\gamma/4$	$1/2 - \gamma/4$	$1/2$
$u_L = 0$	$1/2 - \gamma/4$	$\gamma/4$	$1/2$
p_R	$1/2$	$1/2$	1

Die Parametrisierung durch γ ist so gewählt, dass im Falle $0 \leq \gamma < 1$ *negative* und im Falle $1 < \gamma \leq 2$ *positive* Korrelationen zwischen u_L und u_R bestehen. Im Falle $\gamma = 1$ sind u_L und u_R gänzlich unkorreliert.

3 Input-Kovarianz

Wählen Sie drei Werte $\gamma_1 < 1$, $\gamma_2 = 1$, and $\gamma_3 > 1$ und berechnen Sie die entsprechenden Kovarianzmatrizen

$$\boldsymbol{C}_{1,2,3} = \begin{pmatrix} c_S & c_D \\ c_D & c_S \end{pmatrix},$$

wobei

$$c_S = \langle u_L u_L \rangle - \langle u_L \rangle^2 = \langle u_R u_R \rangle - \langle u_R \rangle^2 \qquad\qquad c_D = \langle u_L u_R \rangle - \langle u_L \rangle \langle u_R \rangle.$$

Generieren Sie für jeden der drei gewählten Werte von γ ein Ensemble von 1000 Input-Paaren (u_L, u_R) mit der korrekten Statistik! Bestimmen Sie dann numerisch die entsprechenden Kovarianzmatrizen und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem zuvor gewonnenen analytischen Resultat!
Plotten Sie für jeden der von Ihnen gewählten Werte von γ die Eigenvektoren und Eigenwerte der entsprechenden (analytischen) Kovarianzmatrix. Benutzen Sie dazu die zur Verfügung gestellte Matlab-Funktion **ShowEigen.m**!
Welcher Eigenvektor ist jeweils dominant in den drei Fällen (negative, positive und verschwindende Korrelation)?

4 Ausbildung von Gewichten mit Saturation

Nehmen Sie an, dass die beiden Afferenzen u_L und u_R mit den respektiven Gewichten w_L und w_R auf ein Zielneuron in der vierten Schicht des primären visuellen Kortex projizieren, sodass die Aktivität des Zielneurons durch

$$v = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = w_L\, u_L + w_R\, u_R$$

gegeben ist.
Nehmen Sie des weiteren an, dass sich die synaptischen Gewichte w_L und w_R entsprechend der Kovarianzregel innerhalb des Intervalls $0 \leq w_{L,R} \leq 1$ (also mit Gewichtssaturation) ausbilden:

$$\tau_w \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{w} \qquad \text{with} \qquad 0 \leq w_{L,R} \leq 1$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_S & c_D \\ c_D & c_S \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie die durch die letzten zwei Gleichungen gegebenen Bewegunsgleichungen der Input-Gewichte explizit auf und zeigen Sie dadurch, dass

$$\tau_w \frac{dw_R}{dt} = c_S w_R + c_D w_L$$

$$\tau_w \frac{dw_L}{dt} = c_D w_R + c_S w_L.$$

Berechnen Sie iterativ die Trajektorien der beiden Gewichte unter Verwendung einiger unterschiedlicher Anfangswerte beider Variablen im Intervall $[0; 0,5]$! Visualisieren Sie die zeitliche Entwicklung in dem (zweidimensionalen) Raum der *Verbindungszustände* (w_L, w_R) mit $w_L, w_R \in [0, 1]$. Vergessen Sie nicht, zu verhindern, dass die Gewicht sich jenseits der Grenzen 0 oder 1 entwickeln! Verwenden Sie als Zeiteinheit den Wert τ_w! Lassen Sie Ihre Simulation über mindestens 100 Zeiteinheiten laufen, und verwenden Sie einen Zeitschritt, der nicht größer als $0,1$ ist!

Beschreiben Sie die verschiedenen Arten von zeitlicher Entwicklung, die Sie für die drei verschiedenen Kovarianzmatrizen beobachten! (Die drei Fälle entsprechen den drei gewählten verschiedenen Werten von γ, siehe oben.) Hängt die Entwicklung von den Anfangsbedingungen ab?

Vergleichen Sie dies mit den Eigenvektoren und Eigenwerten der entsprechenden Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C}_{1,2,3}$! Entlang welchem der Eigenvektoren wachsen die Input-Gewichte? Wachsen die Gewichte immer entlang des Haupteigenvektors? Wenn nicht, warum nicht?

Beschließen Sie diesen Aufgabenteil, indem Sie die diesem Modell zugeordneten notwendige und hinreichende Bedingungen für die Ausbildung 'monokularer' Neuronen angeben.

5 Ausbildung von Gewichten mit dynamischer Normierung

Modifizieren Sie die Bewegunsgleichungen der Gewichte, sodass sie eine dynamische Normierung (Oja-Regel) beinhalten:

$$\tau_w \, \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{w} - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{w}^T\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{w}\right)\,\boldsymbol{w} \qquad\qquad 0 \leq w_{L,R}$$

Schreiben Sie wieder die Bewegungsgleichungen explizit auf und zeigen Sie dadurch, dass

$$\tau_w \, \frac{dw_R}{dt} = (c_S w_R + c_D w_L) - \frac{1}{2}\left(c_S w_R^2 + 2c_D w_L w_R + c_s w_L^2\right)\, w_R$$

$$\tau_w \, \frac{dw_L}{dt} = (c_D w_R + c_S w_L) - \frac{1}{2}\left(c_S w_R^2 + 2c_D w_L w_R + c_s w_L^2\right)\, w_L.$$

Berechnen Sie wieder die Trajektorien der beiden Gewichte unter Verwendung verschiedener Anfangszustände im Intervall $[0; 0,5]$! Visualisieren Sie die zeitliche Entwicklung im Raum der Verbindungszustände! Verwenden Sie als Zeiteinheit die Zeitkonstante τ_W! Simulieren Sie mindestens 200 Zeiteinheiten lang und verwenden Sie einen Zeitschritt, der nicht größer als $0,1$ ist!

Beschreiben Sie die verschiedenen Arten von zeitlicher Entwicklung, die Sie für die drei verschiedenen Kovarianzmatrizen beobachten! (Die drei Fälle entsprechen den drei gewählten verschiedenen Werten von γ, siehe oben.) Hängt die Entwicklung von den Anfangsbedingungen ab?

Vergleichen Sie dies mit den Eigenvektoren und Eigenwerten der entsprechenden Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C}_{1,2,3}$! Entlang welchem der Eigenvektoren wachsen die Input-Gewichte? Wachsen die Gewichte immer entlang des Haupteigenvektors? Wenn nicht, warum nicht?

Beschließen Sie diesen Aufgabenteil, indem Sie die diesem Modell zugeordneten notwendige und hinreichende Bedingungen für die Ausbildung 'monokularer' Neuronen angeben.