4.1.5: Realisierung eines 3-Bit-A/D-Wandlers

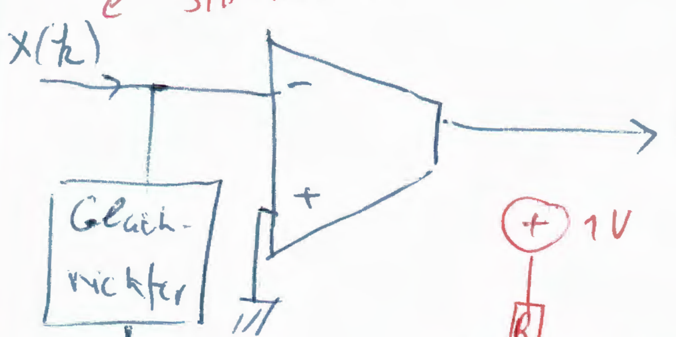
Binär $\triangleq$ $M = 2$ 3-Bit $\triangleq$ $\nu = 3$

$$\Longrightarrow \quad q = M^{\nu} = 8$$

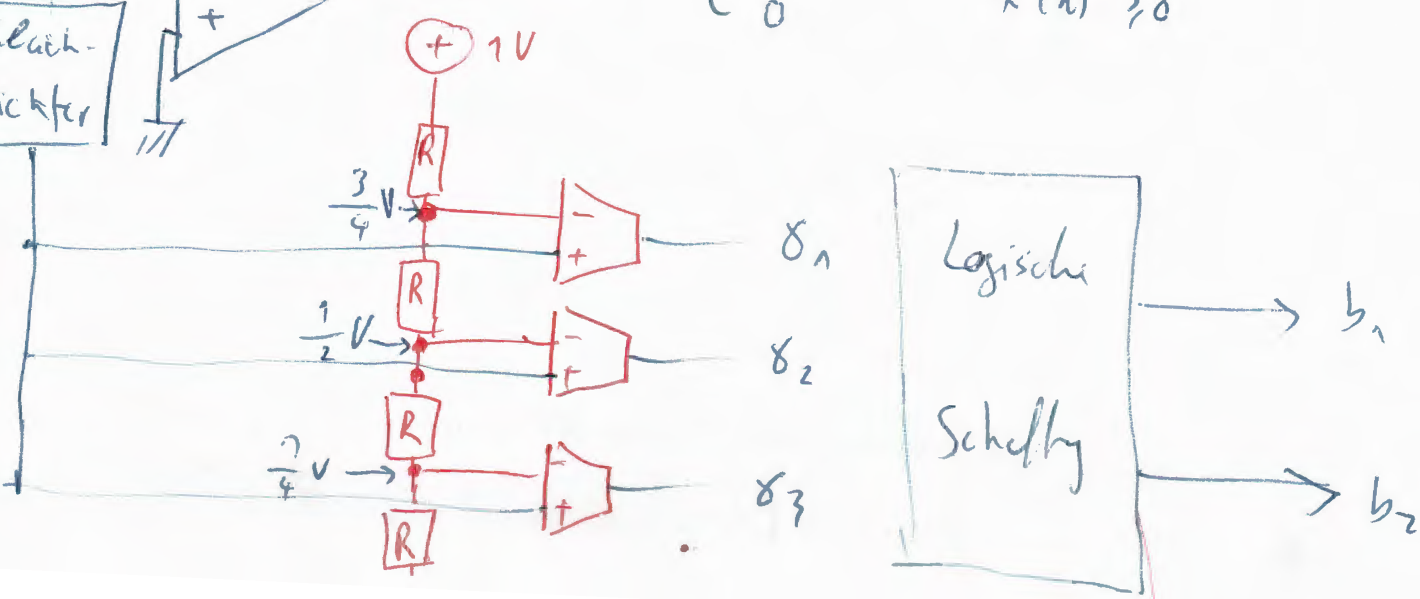
x	x_q	Code I			Code II		
$+1$ … $\frac{3}{4}$	$7/8$	1	1	1	0	1	1
	$5/8$	1	1	0	0	1	0
$\frac{1}{2}$ … $\frac{1}{4}$	$3/8$	1	0	1	0	0	1
0	$1/8$	1	0	0	0	0	0
$-\frac{1}{4}$	$-1/8$	0	1	1	1	0	0
$-\frac{1}{2}$	$-3/8$	0	1	0	1	0	1
$-\frac{3}{4}$	$-5/8$	0	0	1	1	1	0
-1	$-7/8$	0	0	0	1	1	1

Code II: Vorzeichen/Betrags-Codierung

Ausgang eines S/H-Abtasters



$$b_0 = \begin{cases} 1 & x(t) < 0 \\ 0 & x(t) \geq 0 \end{cases}$$



$$\gamma_3 = \begin{cases} 1 & |x(k)| > \frac{1}{4} \\ 0 & |x(k)| < \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \gamma_2 = \begin{cases} 1 & |x(k)| > \frac{1}{2} \\ 0 & |x(k)| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

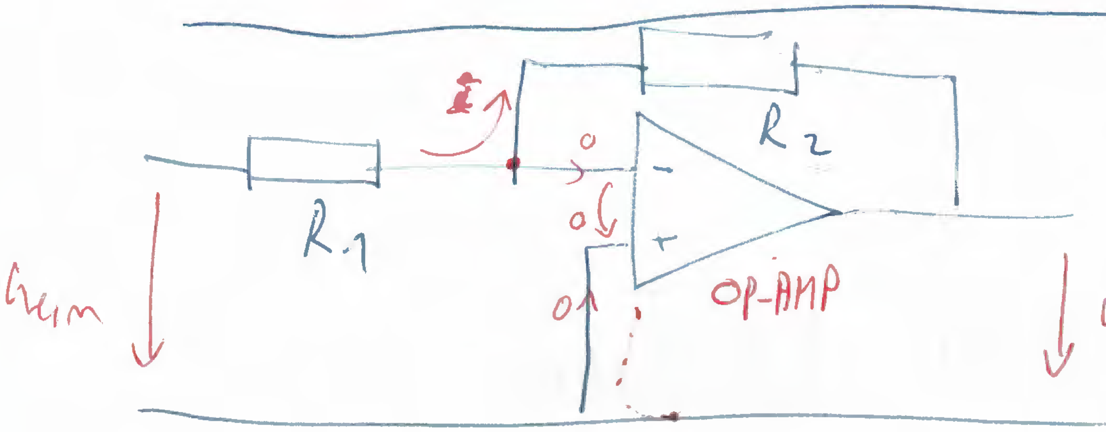
$$\gamma_1 = \begin{cases} 1 & |x(k)| > \frac{3}{4} \\ 0 & |x(k)| < \frac{3}{4} \end{cases}$$

$\gamma_3 = 0$ verbietet $\gamma_2 = 1$ oder $\gamma_1 = 1$

$\gamma_2 = 0$ verbietet $\gamma_1 = 1$

b_2	b_1	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3$
0	0	$\boxed{000}$	001	010	011	100	101	110	111
0	1		$\boxed{001}$						
1	0				$\boxed{011}$				
1	1								$\boxed{111}$

4.1.6: Realisierung eines 3-Bit-D/A-Wandlers

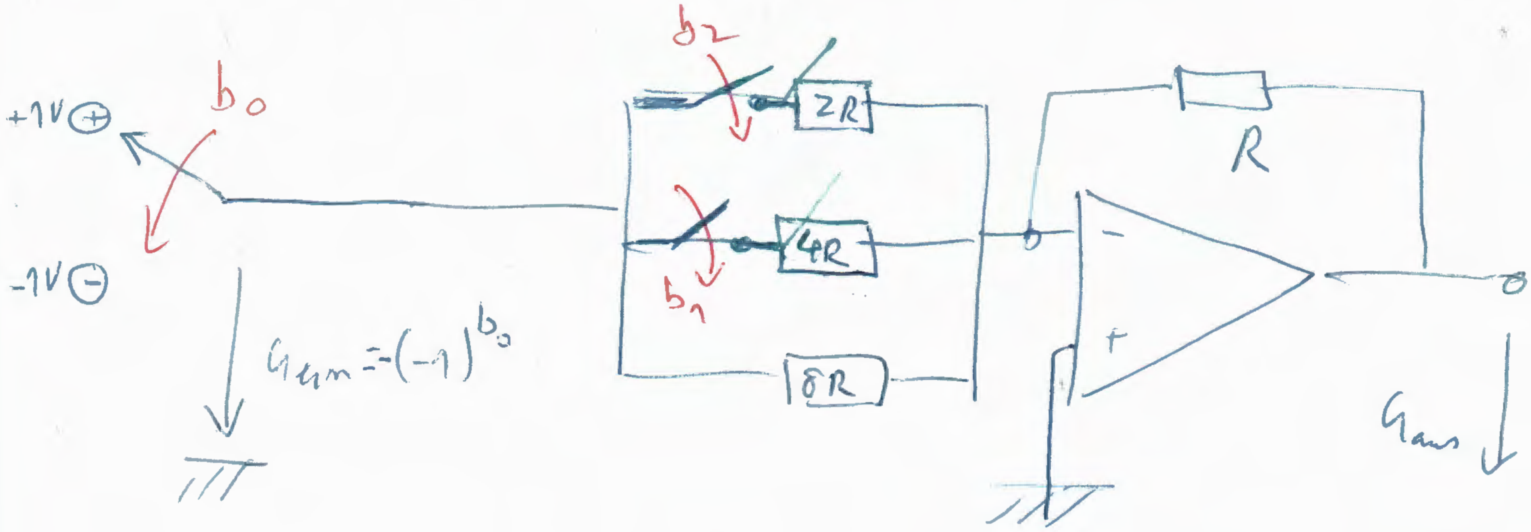


$u_{aus} = -R_2\, i$

$u_{ein} = R_1\, i$

$\Downarrow$

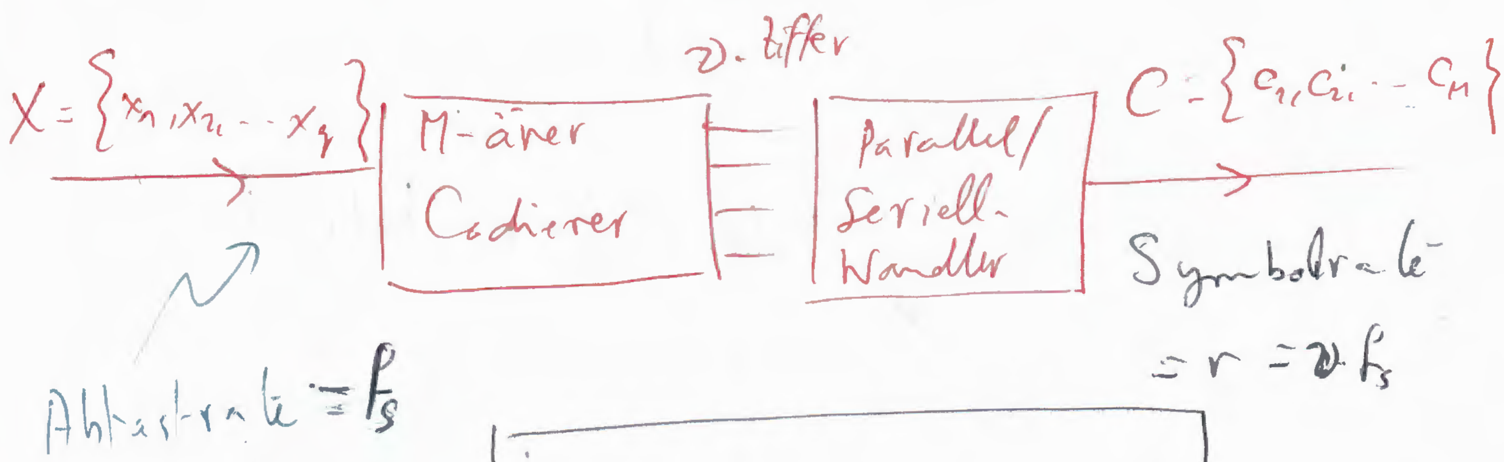
$u_{aus} = -u_{ein} \cdot \frac{R_2}{R_1}$



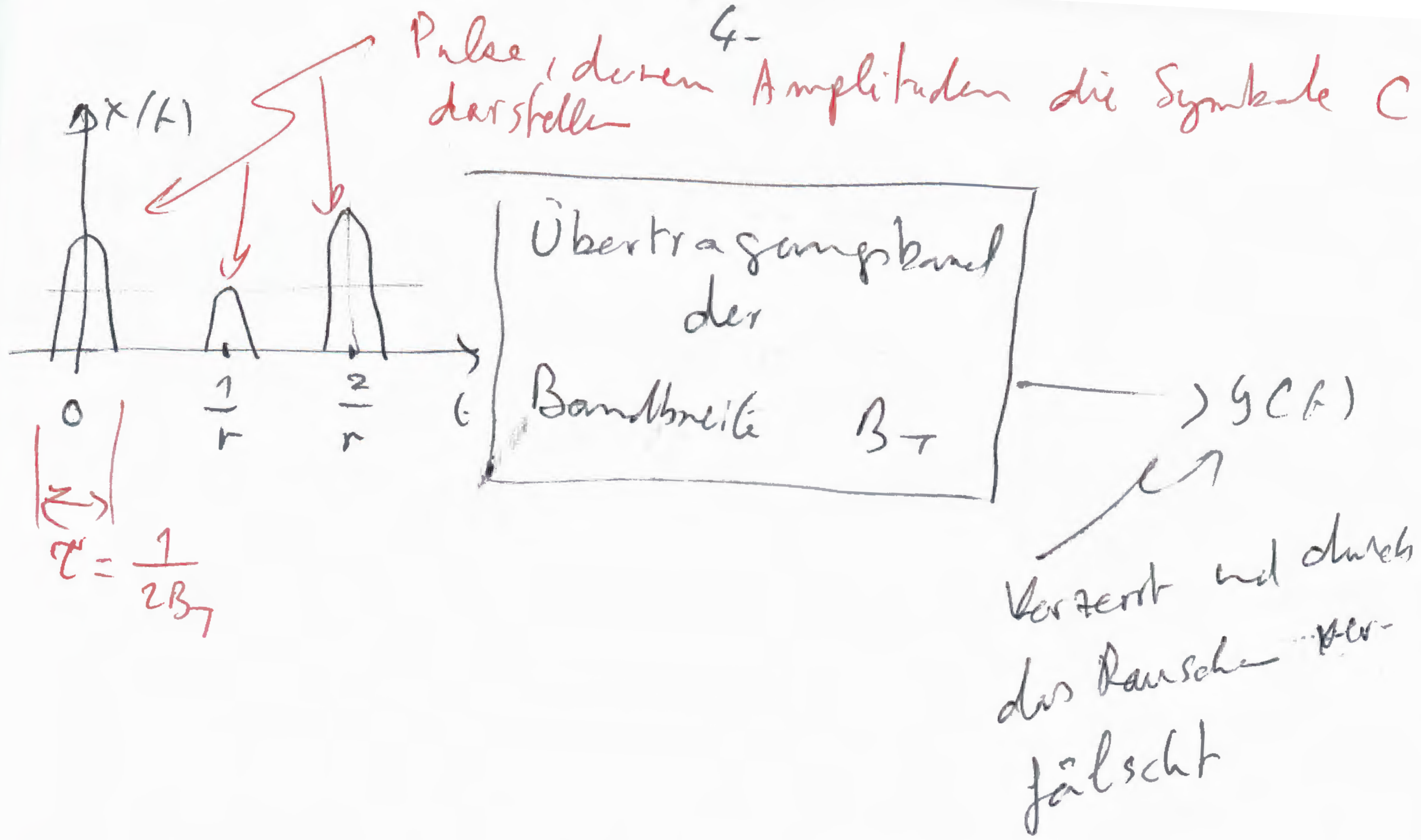
$$u_{aus} = +(-1)^{b_0} \frac{R}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{8R} + \dfrac{b_1}{4R} + \dfrac{b_2}{2R}}} = \frac{-(-1)^{b_0}}{}$$

$$= +(-1)^{b_0} \frac{1 + 2b_1 + 4b_2}{8}$$

4.1.7: Transmissionsbandbreite und Datenrate



$$\boxed{r = \text{Symbolrate} = \nu \cdot f_s}$$



Die maximale Datenrate für eine vorgegebene Transmissionsbandbreite B_T (d.h. für eine vorgegebene Pulsdauer $\tau = \frac{1}{2B_T}$) erreicht man, wenn $\tau = \frac{1}{r}$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{r} = \frac{1}{\tau} = 2B_T}$$

Für eine vorgegebene Datenrate r beträgt die maximale Pulsdauer $\hat{\tau}$ (d.h. die minimale Transmissionsbandbreite $\check{B}_T$) $\hat{\tau} = \frac{1}{2\check{B}_T} = \frac{1}{r}$

$$\Longrightarrow \boxed{\check{B}_T = \frac{r}{2}}$$

Mit $r = \nu R_s$, $R_s = 2 B_{bb}$

erhalten wir $$\check{B}_T = \frac{r}{2} = \frac{\nu R_s}{2} = \frac{\cancel{2}\nu B_{bb}}{\cancel{2}}$$
$$= \nu B_{bb}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\check{B}_T = \nu \cdot B_{bb}}$$

In der Regel ist $\nu > 1$, dies bedeutet, daß PCM benötigt eine größere Bandbreite

Allerdings kann man $\nu < 1$ machen, wenn der Signalstörabstand groß genug ist !

Betrachten wir den Satz der Abtastwerte

$X = \{ x_1, x_2, \ldots x_q \}$ und bilden wir die paarweise Zusammenfassung

$$X^{(2)} = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), \ldots (x_q, x_q)\}$$

$X^{(2)}$ besteht nun aus q^2 Möglichkeiten.

Für den Fall, daß das Rauschverhältnis eine Zahl $M = q^2$ erlaubt, bekommt man $\nu = \frac{1}{2}$ (Vergleich mit $q = M^{\nu}$). Hier stellt jedes Symbol der C-Menge $C = \{c_1, c_2, \ldots c_M\}$ die Codierung von zwei Abtastwerten.

Im Allgemeinen, kann man die Abtastwerte in m-er zusammenfassen

$$X^{(n)} = \Big\{ \underbrace{(x_1, x_1, \ldots x_1), \ \ldots \ (x_q, x_q, \ldots x_q)}_{q^n \text{ Kombinationen}} \Big\}$$

n-er

Falls das Rauschverhalten $M = q^n$ erlaubt, hat man

$$\nu = \frac{1}{n}$$

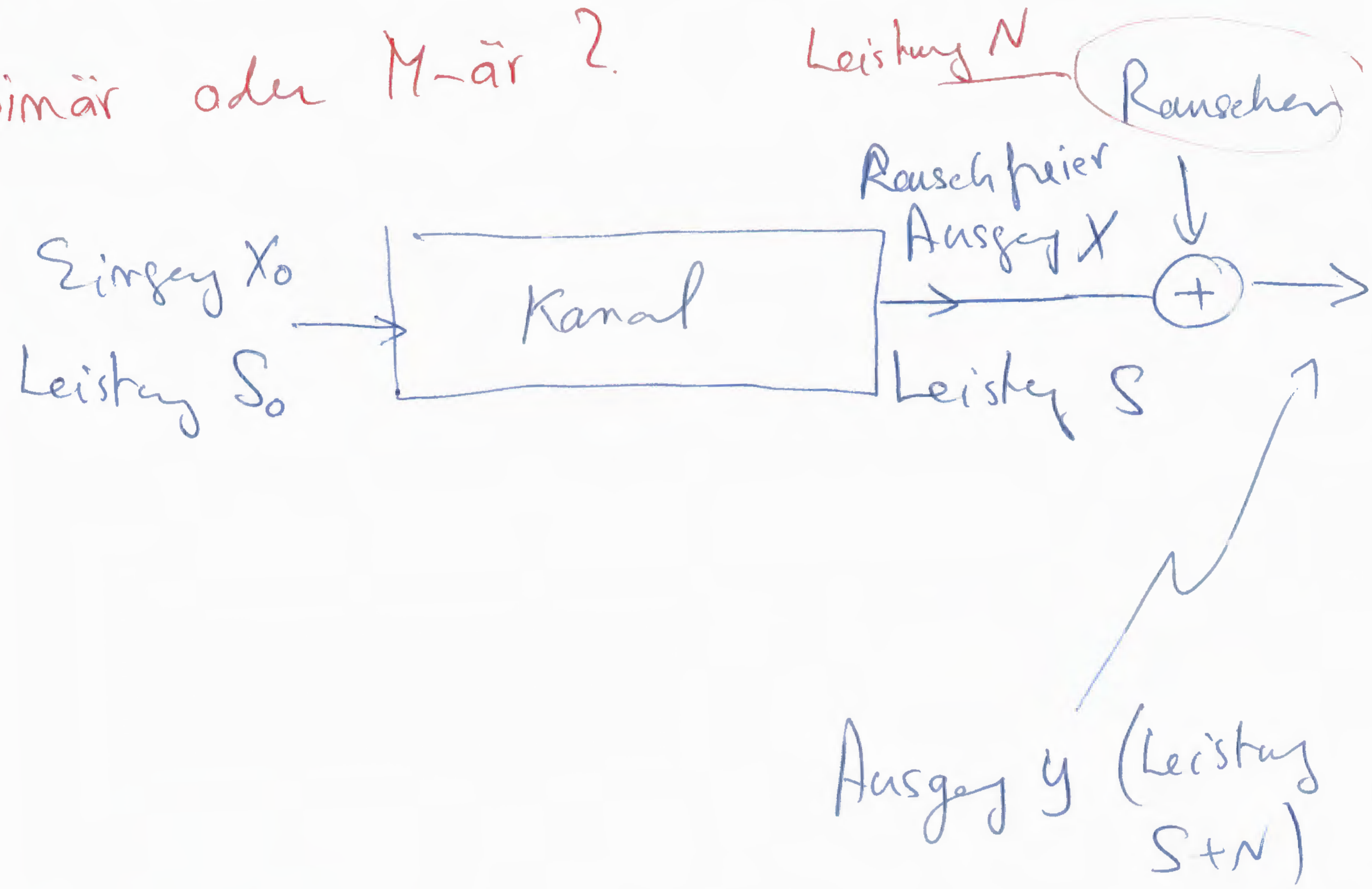
Falls das Rauschverhalten $M < q^n$ erlaubt, können wir die o.g. Kombinationen auf Sequenzen der C-Menge, die aus ν_0 C-Symbolen bestehen $\Longrightarrow q^n = M^{\nu_0}$

$$\Longrightarrow \boxed{\nu = \frac{\nu_0}{n}}$$

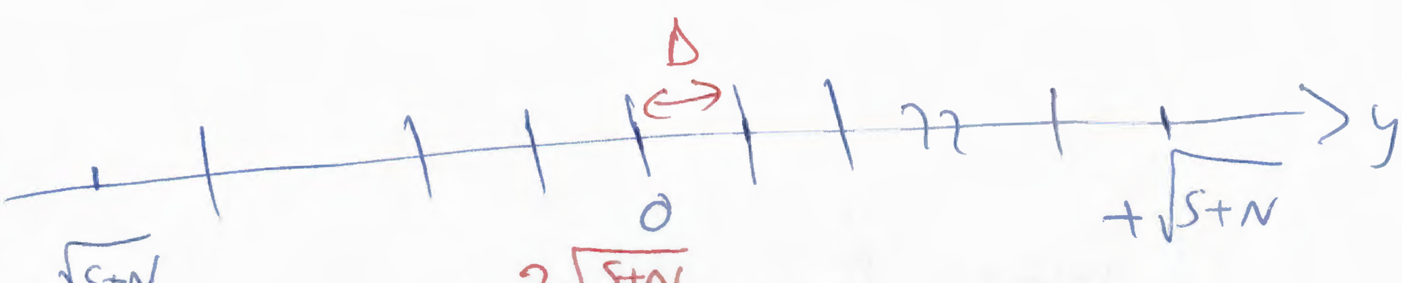
Dies bedeutet, daß ν jeden beliebigen Wert annehmen kann.

4.1.8: Rauschverhalten der PCM-Übertragung

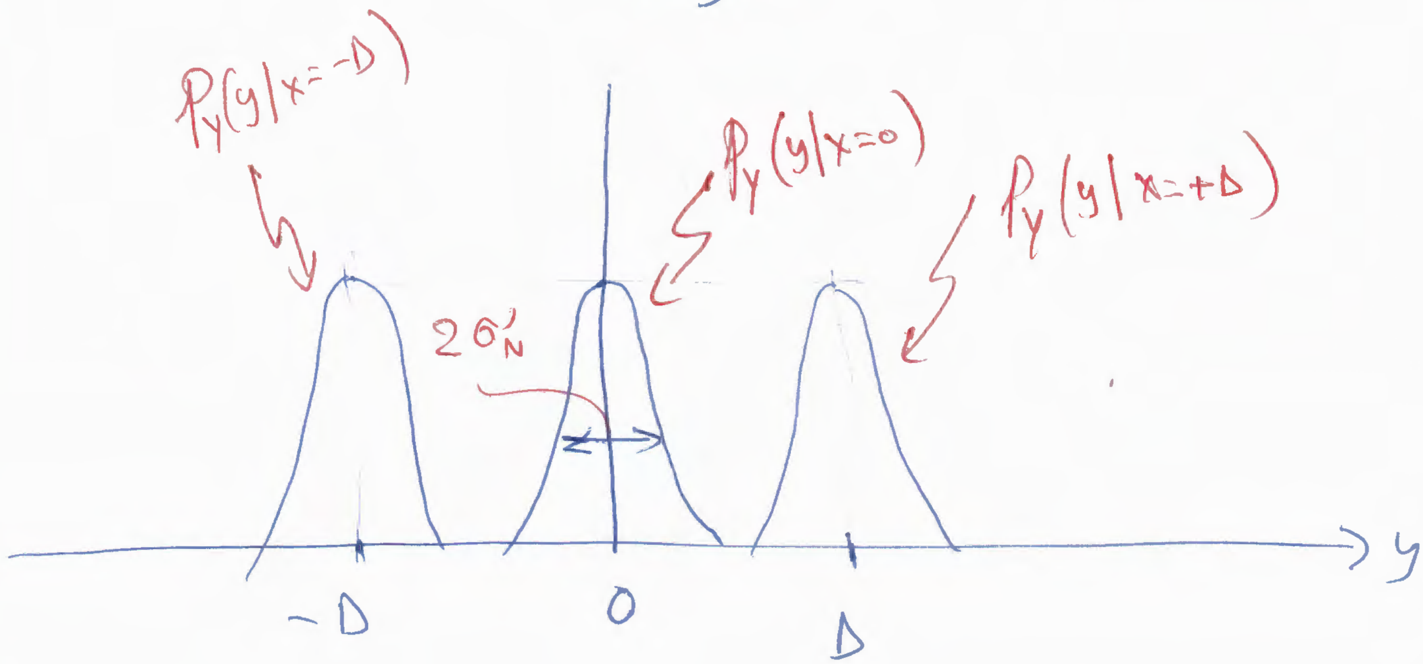
Hier versuchen wir die Frage zu beantworten Binär oder M-är ?



Die Signalspanne von y dehnt sich aus von $-\sqrt{S+N}$ bis $+\sqrt{S+N}$. Diese Spanne wird in M-Intervalle aufgeteilt:



$$\Delta = \frac{2\sqrt{S+N}}{M}$$



Um die C-Symbole voneinander zu unterscheiden,

muß $$\Delta = \frac{2\sqrt{S+N}}{M} \geq 2\sigma_N' = 2\sqrt{N}$$

$$\Longrightarrow \quad M \leq \sqrt{\frac{S+N}{N}} = \sqrt{1+\frac{S}{N}}$$

Zusammen mit $\check{B}_T = \nu \cdot B_{bb}$ und $q = M^{\nu}$

erhält man: $$\nu = \frac{\log_2 q}{\log_2 M}$$

$$\check{\nu} = \frac{\log_2 q}{\log_2 \hat{M}} = \frac{2\log_2 q}{\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)}$$

$$\left(\check{B}_T\right) = \check{\nu} \cdot B_{bb} = 2B_{bb}\,\frac{\log_2 q}{\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)}$$

$$\boxed{\left(\check{B}_T\right)_{min} = \frac{2\log_2 q}{\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)} B_{bb}}$$

$$\underbrace{\left(\check{B}_T\right)_{min} \log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)}_{\text{verfügbare Ressource}} = \underbrace{2\log_2 q \cdot B_{bb}}_{\text{Eigenschaft des Signals}}$$

4.1.9: Äquivalente binäre Rate

Für einen binären Datenfluß der Rate r_b kann man Blöcke aus n-Bits bilden. Die Anzahl der möglichen Blöcke ist

$$M = 2^n$$

Nun kann man diese Blöcke auf Ein-Symbol-Codes abbilden, die mit der

Rate r_c übertragen werden : hier gilt

$$r_c = \frac{r_b}{m} = \frac{r_b}{\log_2 M}$$

Mit $r_c = 2 B_T$ $\quad r_b = 2 B_T \log_2 M$

$$(r_b)_{max} = 2 B_T \log_2 M_{max} , \quad M_{max} = \sqrt{1 + \frac{S}{N}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{(r_b)_{max} = B_T \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right)}$$

4.1.10 : Das Quantisierungsrauschen