Vorlesung am 23.11.05

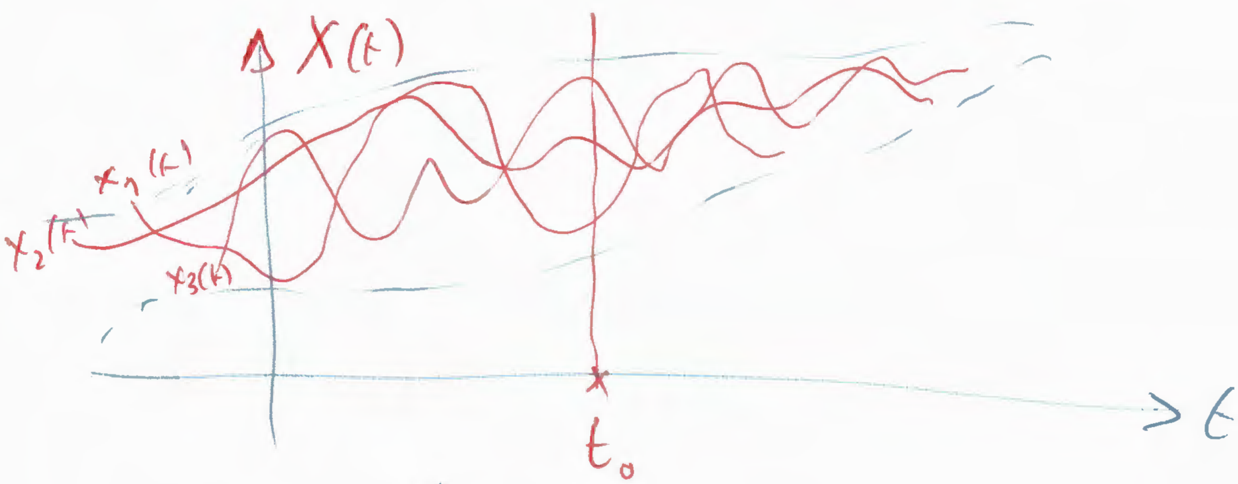
7. V

KT-I 05/06

3.3: Stochastische Vorgänge (Fort.)

3.3.1: Beschreibung der stochastischen Vorgänge ✓

3.3.2: statistische und temporale Mittelwerte

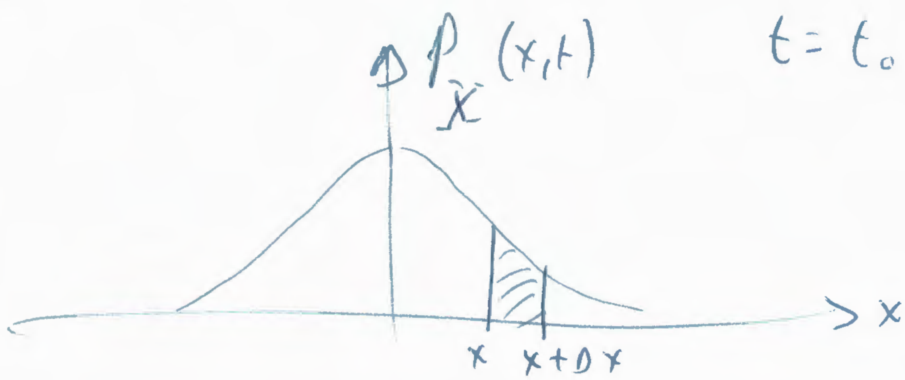


$$\langle X(t_0)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \, p_X(x,t_0)\, dx$$

$$\langle f(X(t_0))\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, p_X(x,t_0)\, dx$$

statistische Mittelwerte

$f(X(t_0))$ ist eine Zufallsvariable

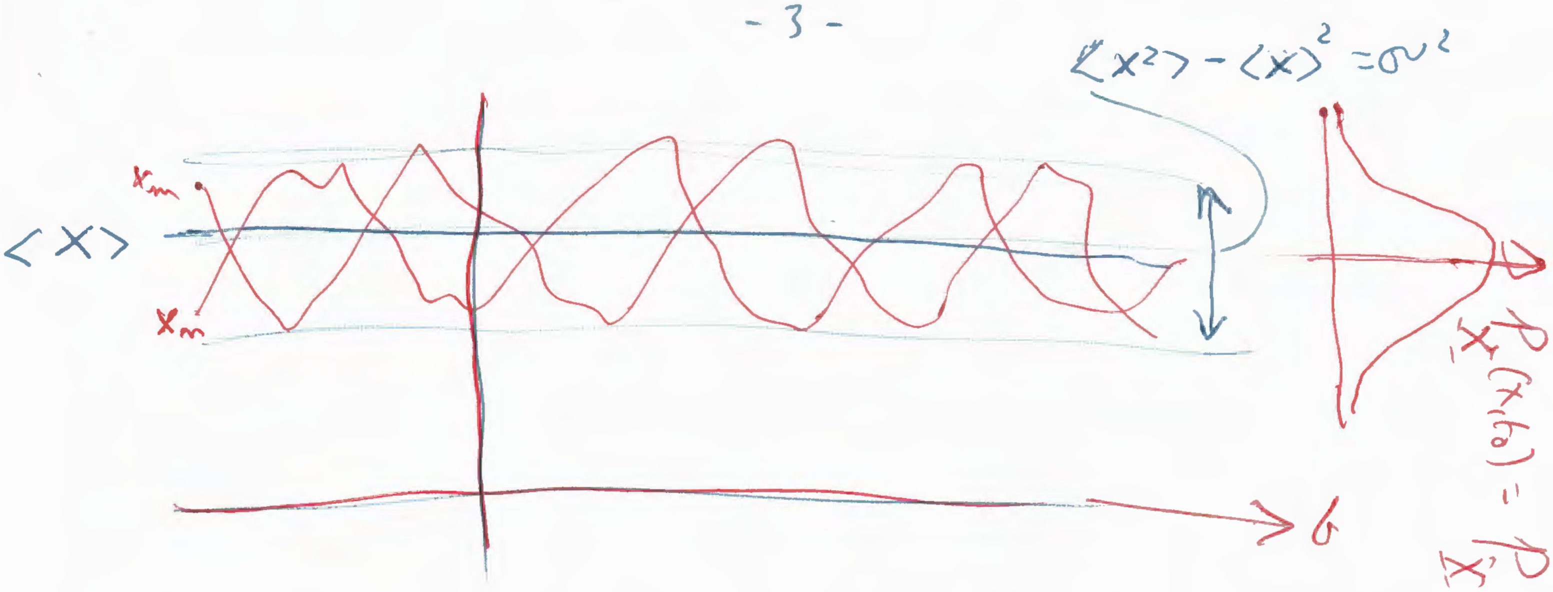


$$P\{x \le X(t_0) \le x+\Delta x\} = p_X(x,t_0)\, dx$$

$\langle X(t_0)\rangle$, $\langle X^2(t_0)\rangle$, ... $\langle f(X(t_0))\rangle$ sind t_0-Abhängig

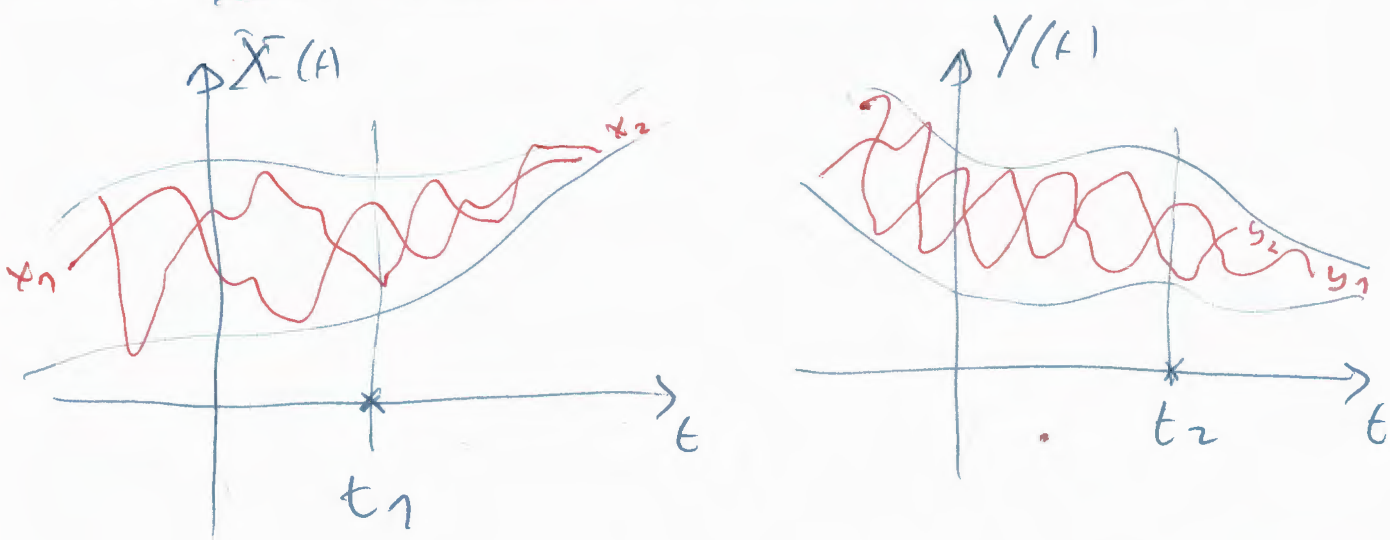
Aber, $R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_y(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{G_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot G_x(\omega)}$$

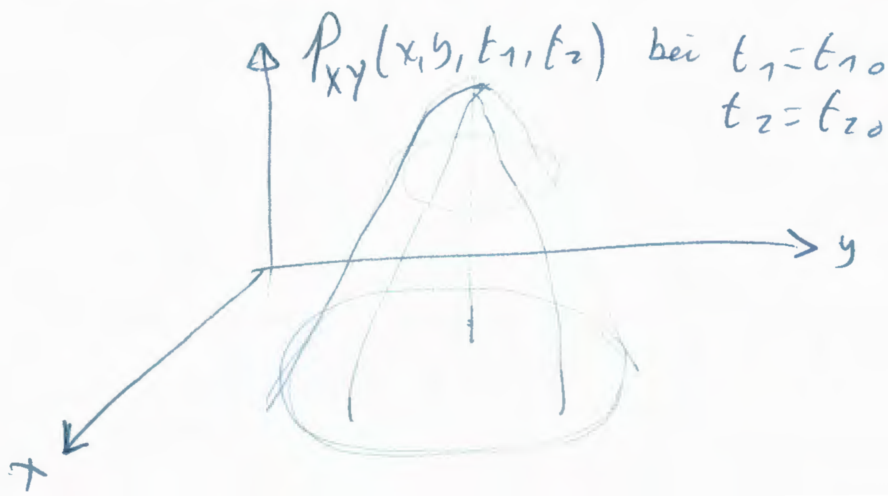


$p_X(x,t_0) = p_X(x) = t$-unabhängig

3.3.3: Die Kreuzkorrelationsfunktion KKF



$(X(t_1), Y(t_2))$ bilden eine sogenannte <u>Verbund-Zufallsvariable</u>. Diese wird mit Hilfe der sogenannten Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung $P_{XY}(x,y;t_1,t_2)$ beschrieben



$$G_x(\omega) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} = \mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\}$$

$\overline{X(t)\,x(t+\tau)}$

$\langle X(t)\cdot X(t+\tau)\rangle$

$$G_y(\omega) = \mathcal{F}\{R_y(\tau)\} = \mathcal{F}\{R_{yy}(\tau)\}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\quad h(t) \quad} \longrightarrow y(t)$$

steht für $x_m(t)$; m = beliebig

steht für $y_m(t)$; m = beliebig

$$R_y(\tau) = \langle y(t)\cdot y(t+\tau)\rangle$$

deterministisch

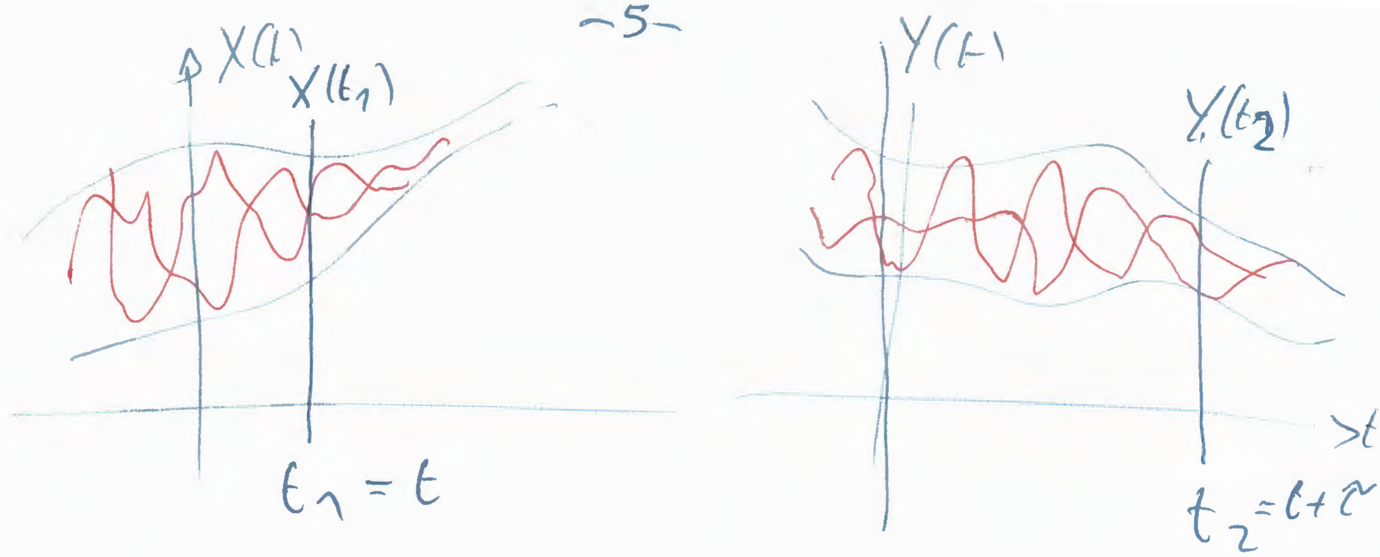
$$= \langle y(t+\tau) \int_{-\infty}^{\infty} h(t')\cdot x(t-t')\,dt'\rangle$$

eine Probefunktion

eine Probefunktion

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t')\,\langle y(t+\tau)\cdot x(t-t')\rangle\,dt'$$

Wegen der Stationarität, ist $\langle y(t+\tau)\,x(t-t')\rangle$ eine Funktion von $(t+\tau)-(t-t') = \tau + t'$ $\Longrightarrow$



Stationär bedeutet:

$$R_{xy}(t, t+\tau) = \langle X(t)\cdot Y(t+\tau)\rangle$$
$$= R_{xy}(\tau)$$

Ergodische Vorgänge sind stationär $\Longrightarrow$

$$\langle X(t)\cdot Y(t+\tau)\rangle = \underbrace{\overline{x(t)\cdot y(t+\tau)}}$$

temporale Mittelwert von $x_n(t)\cdot y_m(t+\tau)$; wobei n und m beliebig sind

$$\overline{x(t)\cdot y(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x_n(t)\cdot y_m(t+\tau)\,dt$$

wobei n und m beliebig sind.

Zusammenfassend, haben wir: unabhängig von n

$$R_X(\tau) = \overline{x_n(t)\, x_n(t+\tau)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_n(t) \cdot x_n(t+\tau)\, dt$$

$$= \langle X(t_0)\, X(t_0+\tau) \rangle$$

unabhängig von t_0

$$R_X(\tau) = \overline{x(t)\, x(t+\tau)} = \langle X(t) X(t+\tau) \rangle$$

Die gesamte Signalleistung ist

$$\boxed{P_X = \overline{x^2(t)} = R_X(0) = \langle X^2(t) \rangle}$$

$$\Longrightarrow \quad G_X(\omega) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}$$

= Leistungsspektraldichte des stochastischen Vorgangs

3-4: Systemauswirkung auf Spektraldichten

Zusammenfassend, haben wir: unabhängig von n

$$R_X(\tau) = \overline{x_n(t)\, x_n(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x_n(t)\cdot x_n(t+\tau)\,dt$$

$$= \langle X(t_0)\, X(t_0+\tau)\rangle$$

unabhängig von t_0

$$R_X(\tau) = \overline{x(t)\, x(t+\tau)} = \langle X(t) X(t+\tau)\rangle$$

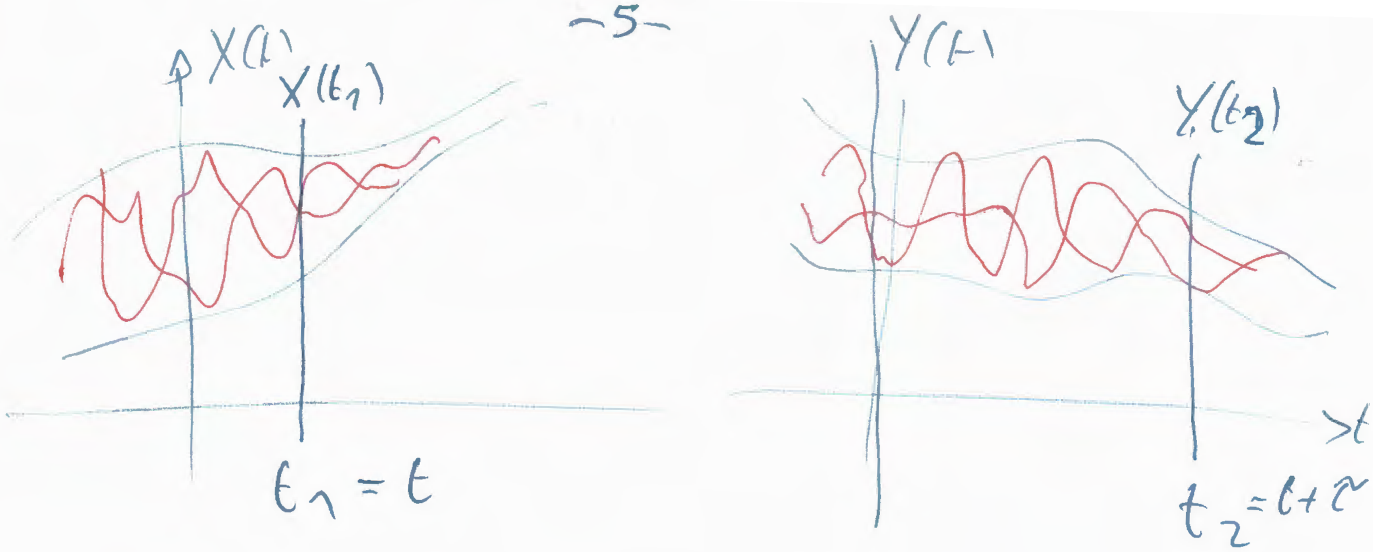
Die gesamte Signalleistung ist

$$\boxed{P_X = \overline{x^2(t)} = R_X(0) = \langle X^2(t)\rangle}$$

$$\Longrightarrow \quad G_X(\omega) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}$$

= Leistungsspektraldichte des stochastischen Vorgangs

3.4: Systemauswirkung auf Spektraldichten



Stationär bedeutet:

$$R_{xy}(t, t+\tau) = \langle X(t) \cdot Y(t+\tau) \rangle$$
$$= R_{xy}(\tau)$$

Ergodische Vorgänge sind stationär $\Longrightarrow$

$$\langle X(t) \cdot Y(t+\tau) \rangle = \underbrace{\overline{x(t) \cdot y(t+\tau)}}$$

temporale Mittelwert von $x_n(t) \cdot y_m(t+\tau)$; wobei n und m beliebig sind

$$\overline{x(t) \cdot y(t+\tau)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_n(t) \cdot y_m(t+\tau)\, dt$$

wobei n und m beliebig sind.

$$G_x(\omega) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} = \mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\}$$

$\overline{x(t)\, x(t+\tau)}$

$\langle X(t)\cdot X(t+\tau)\rangle$

$$G_y(\omega) = \mathcal{F}\{R_y(\tau)\} = \mathcal{F}\{R_{yy}(\tau)\}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

steht für $x_m(t)$; m = beliebig

steht für $y_m(t)$; m = beliebig

$$R_y(\tau) = \langle y(t)\cdot y(t+\tau)\rangle$$

deterministisch

$$= \langle y(t+\tau) \int_{-\infty}^{\infty} h(t')\cdot x(t-t')\,dt'\rangle$$

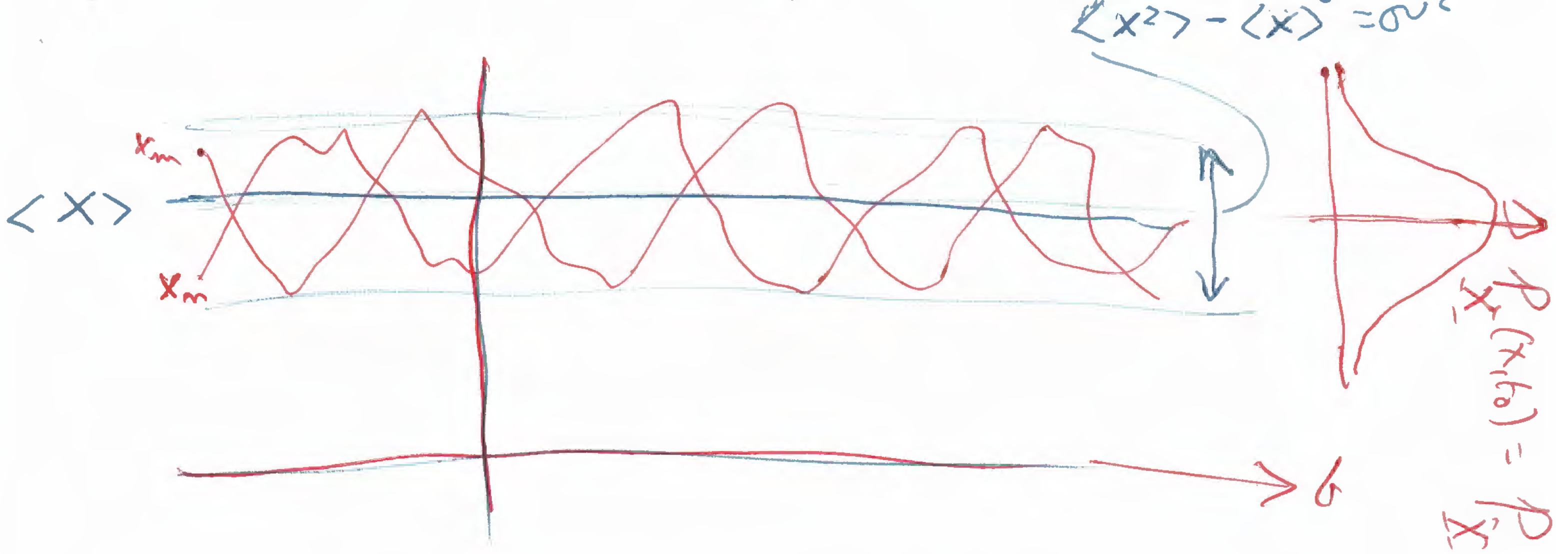
eine Probefunktion

eine Probefunktion

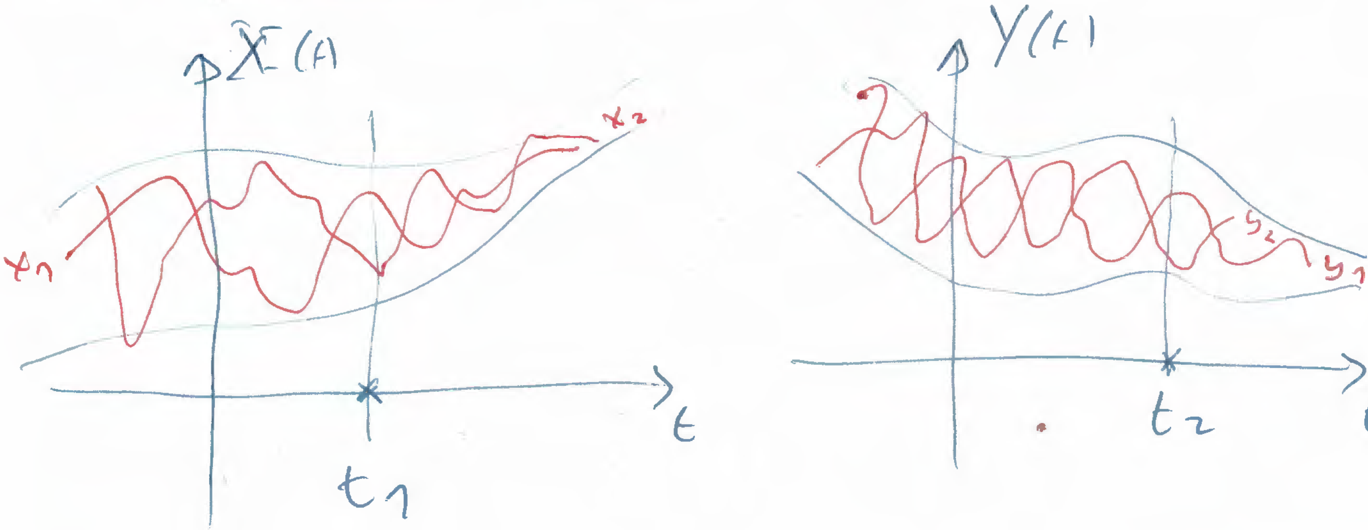
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t')\,\langle y(t+\tau)\cdot x(t-t')\rangle\,dt'$$

Wegen der Stationarität, ist $\langle y(t+\tau)\, x(t-t')\rangle$

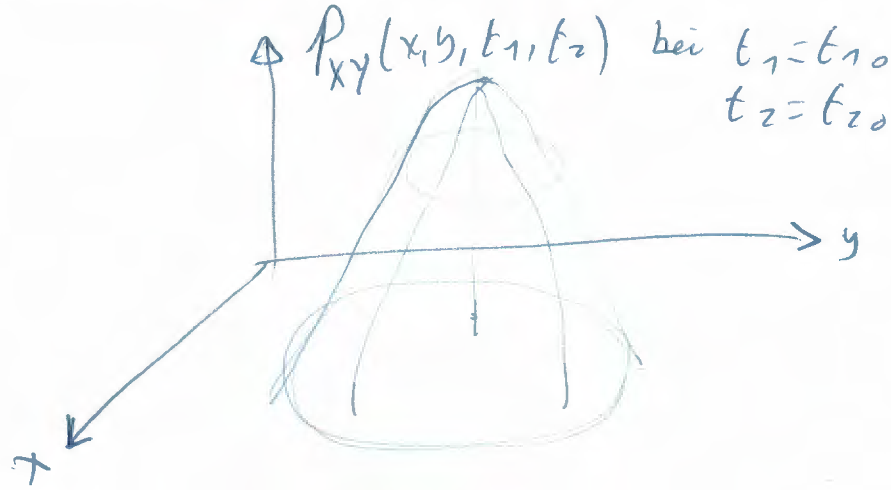
eine Funktion von $(t+\tau)-(t-t') = \tau + t'$ $\Longrightarrow$



3-3-3: Die Kreuzkorrelationsfunktion KKF



$(X(t_1), Y(t_2))$ bilden eine sogenannte Verbund-Zufallsvariable. Diese wird mit Hilfe der sogenannten Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung $P_{XY}(x,y;t_1,t_2)$ beschrieben



Aber, $R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{G_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot G_x(\omega)}$$

7.V

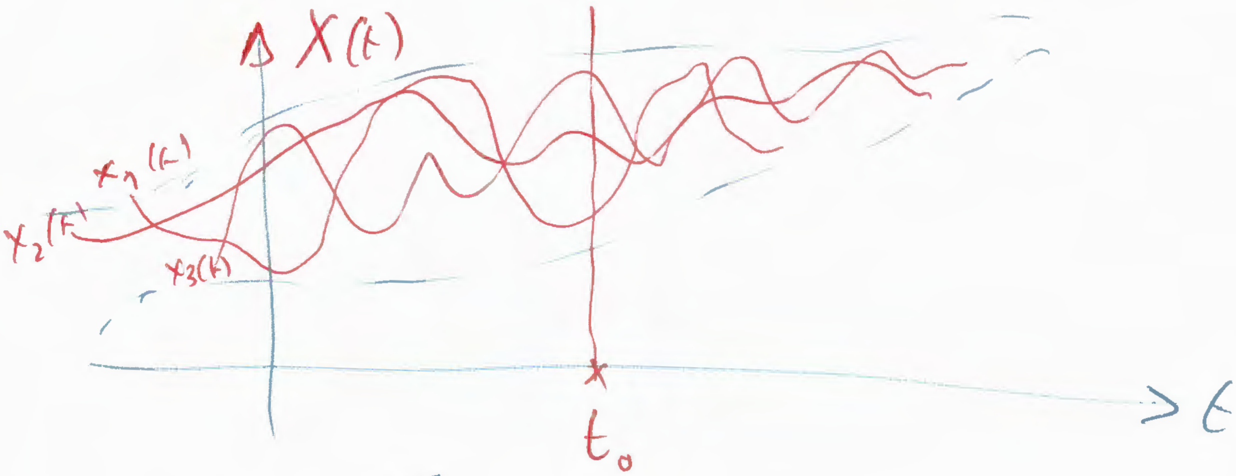
KT-I
05/06

Vorlesung am 23.11.05

3.3: Stochastische Vorgänge (Fort.)

3.3.1: Beschreibung der stochastischen Vorgänge ✓

3.3.2: statistische und temporale Mittelwerte



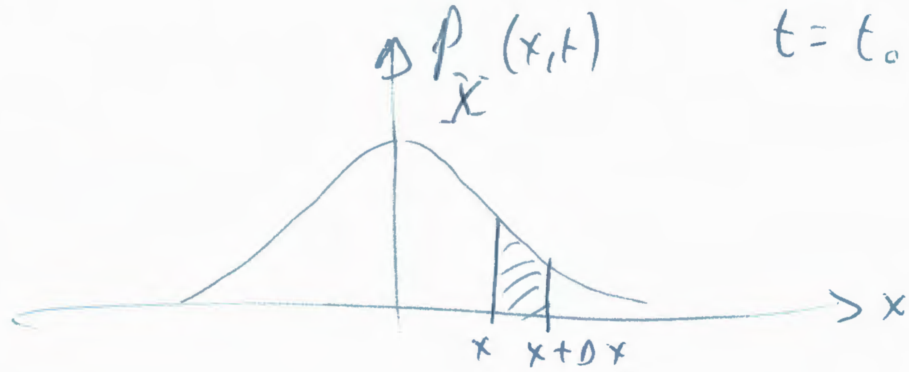
$$\langle X(t_0)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \, p_{X}(x,t_0)\, dx$$

$$\langle f(X(t_0))\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, p_{X}(x,t_0)\, dx$$

statistische Mittelwerte

$f(X(t_0))$ ist eine Zufallsvariable

$t = t_0$



$$P\{x \le X(t_0) \le x+\Delta x\} = p_{X}(x,t_0)\, dx$$

$\langle X(t_0)\rangle, \langle X^2(t_0)\rangle, \dots \langle f(X(t_0))\rangle$ sind t_0-abhängig