Vorlesung am 16.11.05

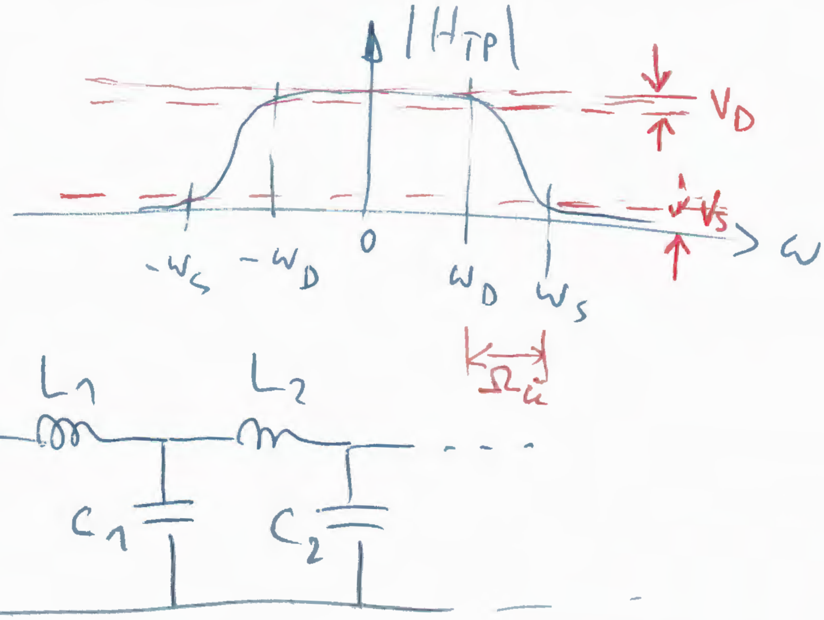
6.V

KT-I
05/06

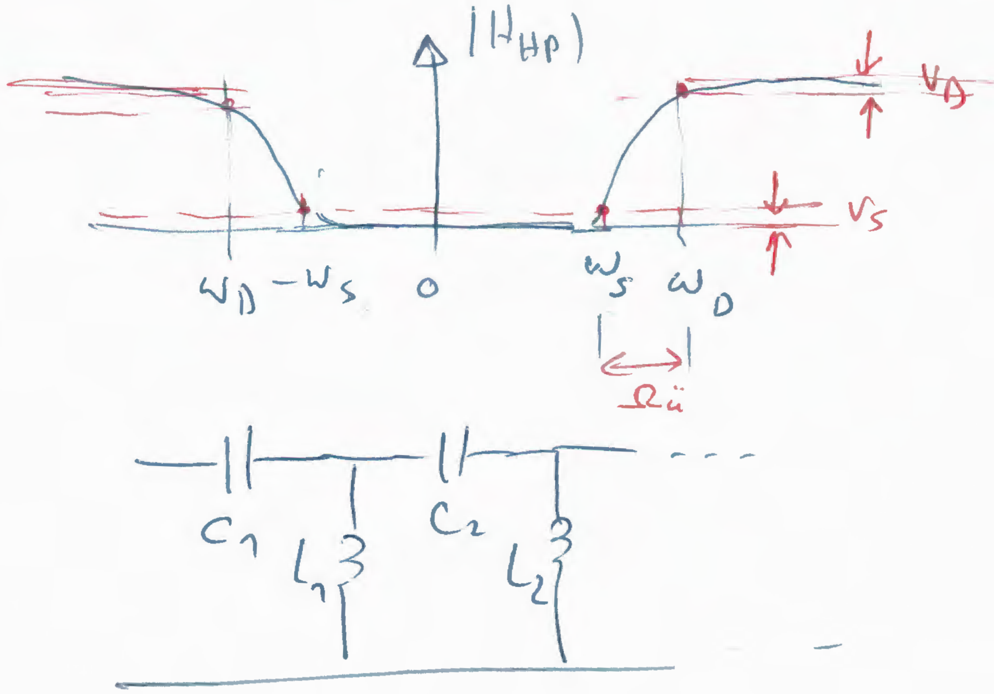
2.5.2: Realisierbare Filter

Wegen der Nicht-Kausalität der idealen Filter, werden praktische Filter wie folgt realisiert:

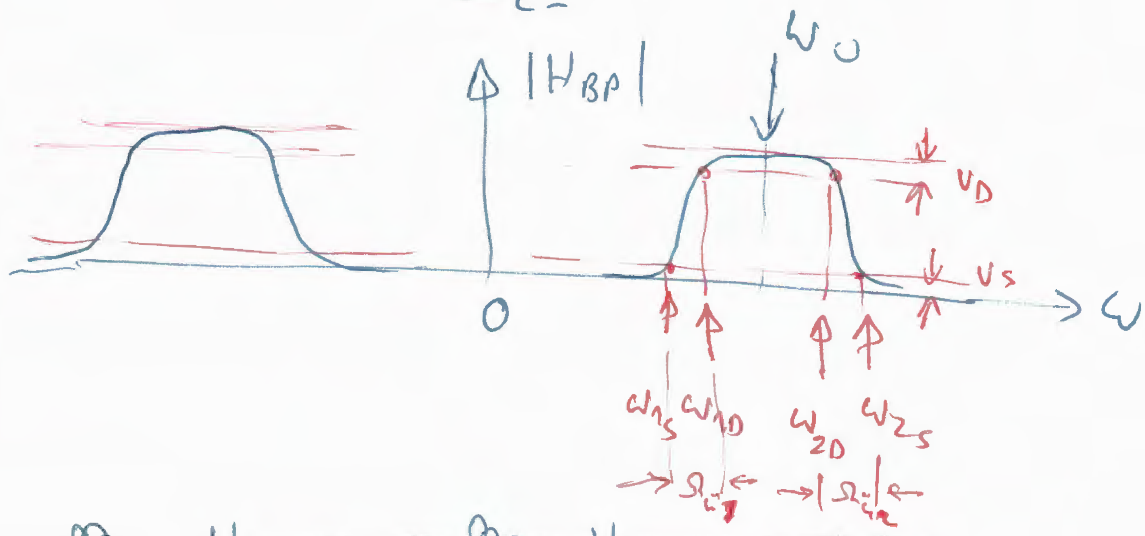
TPF

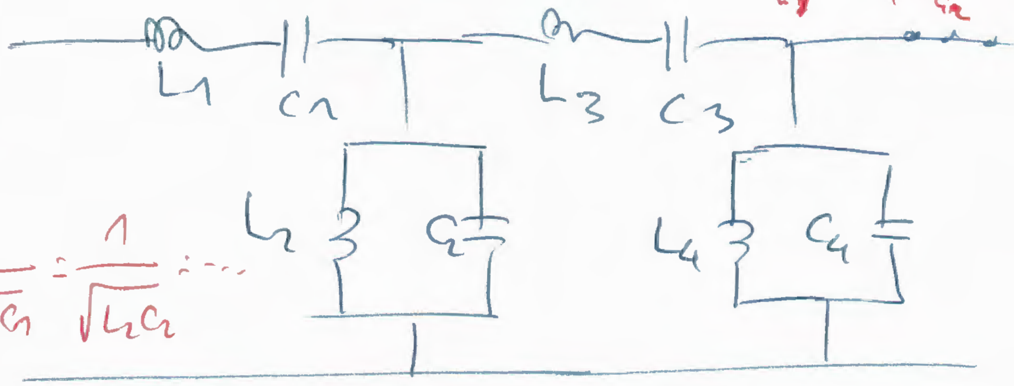


HPF



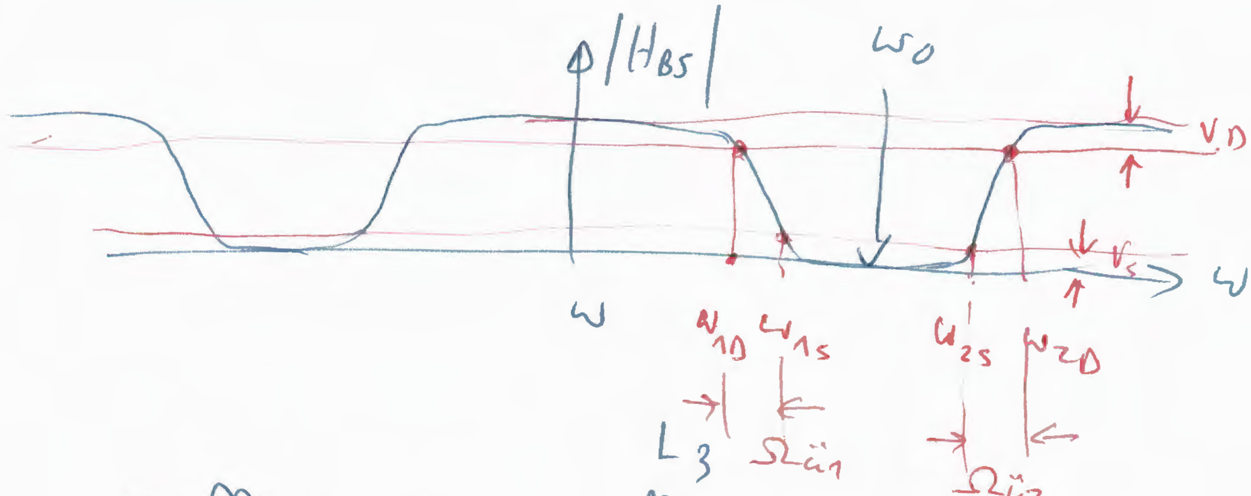
BPF

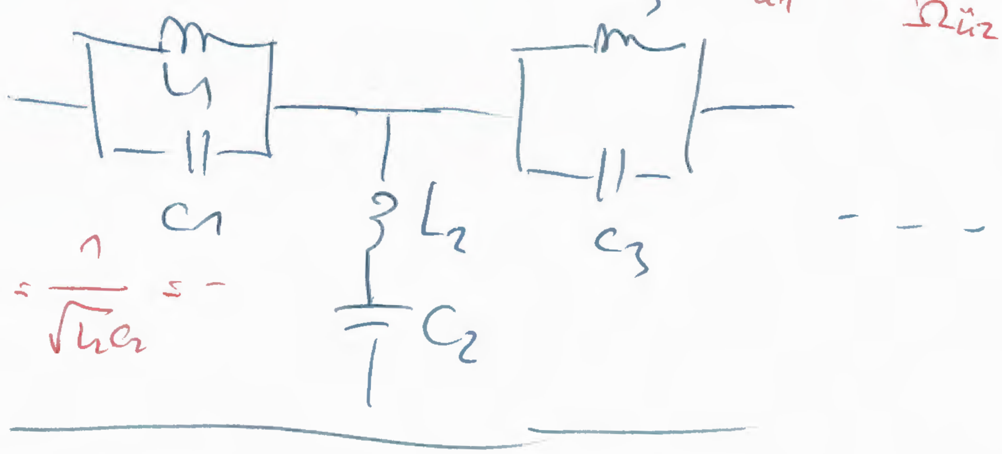




$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}} = \dots$$

BSF





$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}} = \dots$$

$V_D \to 0$, $V_S \to 0$ und $\Omega_{ü} \to 0$ nur wenn

N = Anzahl der reaktiven Elemente $\to \infty$

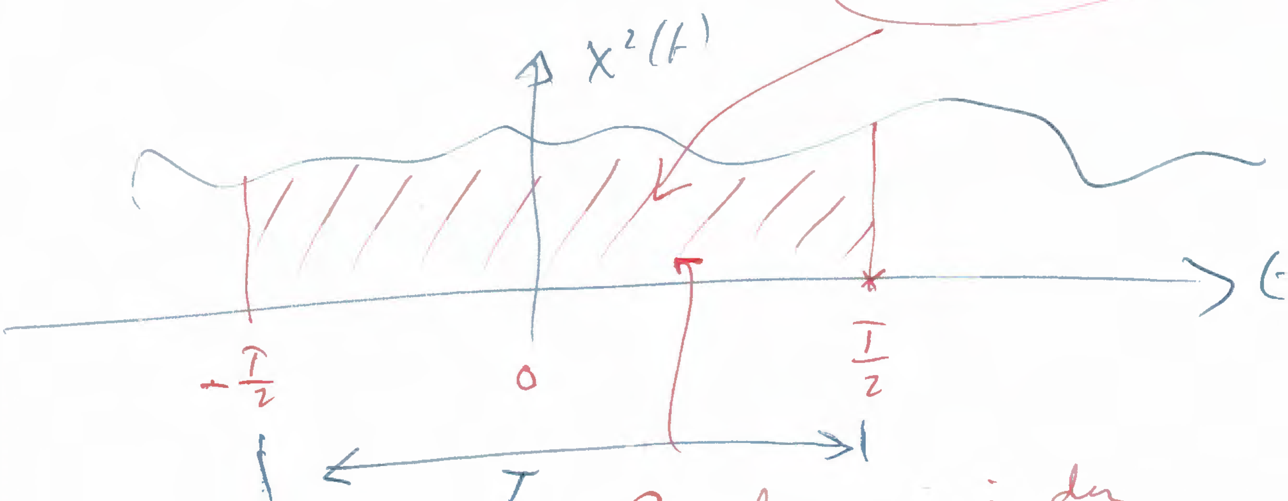
Kapitel 3: Deterministische und Stochastische Vorgänge

3.1: Energie- und Leistungssignale

$x^2(t)$ ist ein Maß für die Augenblickliche Leistung

$$\text{Signalenergie } E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt$$

$$\text{Signalleistung } P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)\, dt$$



Signalenergie in der Zeit $|t| \leq \frac{T}{2}$

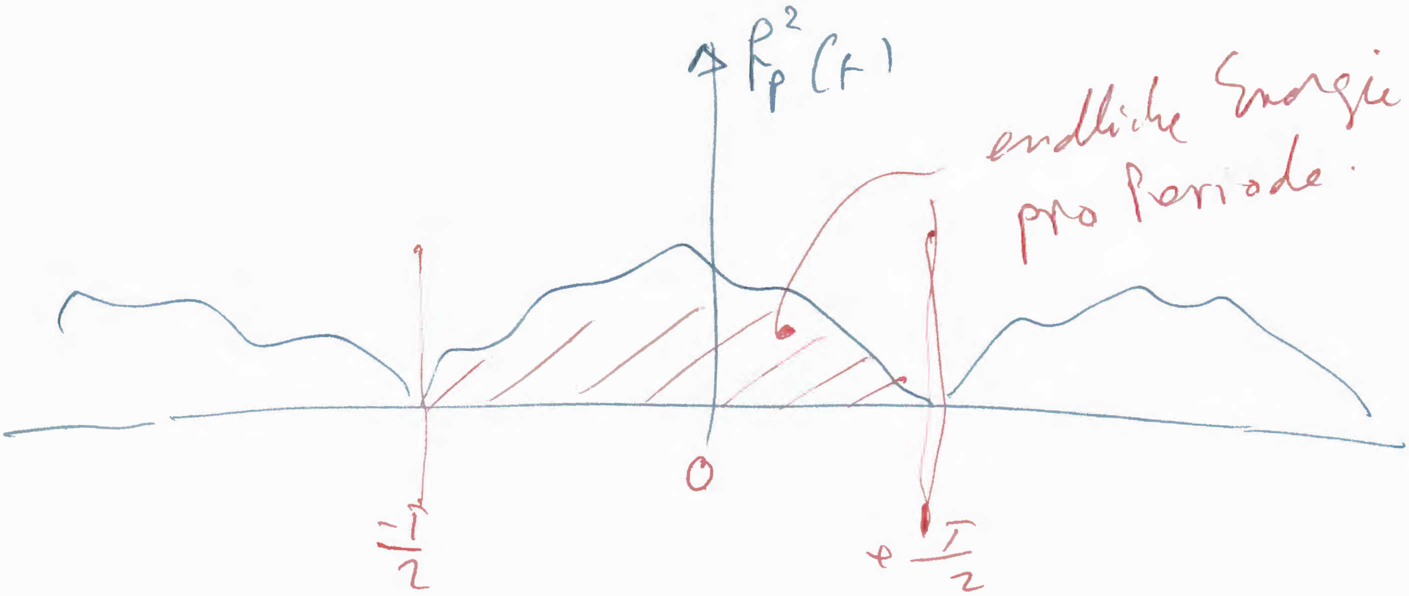
Signale werden in Energie- und Leistungs-Signale klassifiziert.

Energie-Signale : E_x = Endlich , $P_x = 0$

Leistungs-Signale : P_x = endlich , $E_x \to \infty$

1-) Fouriertransformierbare Signale sind Energie-Signale

2-) Periodische Signale (einschließlich mono-chromatischer Signale) sind Leistungs-Signale



3.2: Die Autokorrelationsfunktion (AKF) und die spektrale Dichte (Spektraldichte)

Autokorrelationsfunktion $R_x(\tau) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x(t \pm \tau)\, dt & \text{E-Signal} \\ \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\, x(t \pm \tau)\, dt & \text{L-Signal} \end{cases}$

$R_x(\tau)$ ist ein Maß für die Ähnlichkeit zwischen $x(t)$ und $x(t \pm \tau)$

Wichtig $R_x(0) = \begin{cases} E_x & \text{für E-Signale} \\ P_x & \text{" L-Signale} \end{cases}$

Die Spektraldichte $G_x(\omega)$ wird zunächst als die Fourier-Transformation der AKF definiert

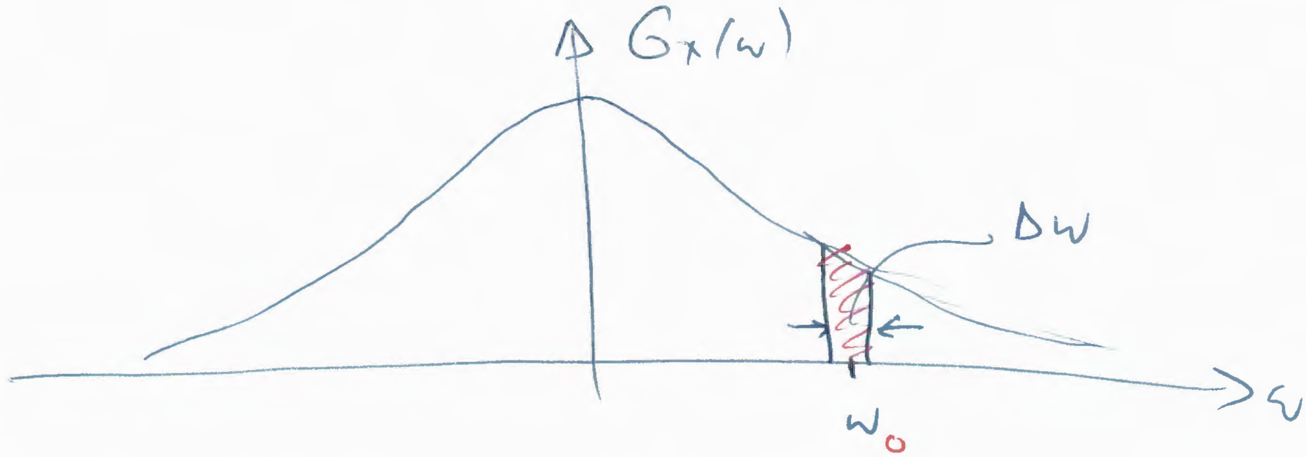
$$G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

Warum wird $G_x(\omega)$ Spektraldichte genannt?

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_x(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

$$R_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega)\, d\omega = \begin{cases} E_x & : \text{E-Signale} \\ P_x & : \text{L-Signale} \end{cases}$$

Wegen $R_x(-\tau) = R_x(\tau)$ ist $G_x(\omega)$ reell.



$\frac{1}{2\pi} G_x(\omega_0) \cdot \Delta\omega$ ist der Anteil der Signal (Energie/Leistung), idem die Frequenz ω_0 ~~zur~~ zur gesamten (Energie/Leistung) beiträgt

Für Fourier-transformierbare Signale, die Energie-Signale sind gilt folgendes:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x(t-\tau)\, dt$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega(t-\tau)} \, d\omega \right] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{j\omega t} \, dt \right]}_{X(-\omega) = X^*(\omega)} e^{-j\omega\tau} \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[X(\omega) \cdot X^*(\omega) \right] e^{-j\omega\tau} \, d\omega$$

Mit $\quad R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega)\, e^{j\omega\tau} \, d\omega$

erhalten wir $\quad G_x(\omega) = X(-\omega) \cdot X^*(-\omega)$

$$= X(\omega) \cdot X^*(\omega)$$

$G_x(\omega)$ ist in der Tat gerade Funktion

$$\Longrightarrow \quad \boxed{G_x(\omega) = |X(\omega)|^2}$$

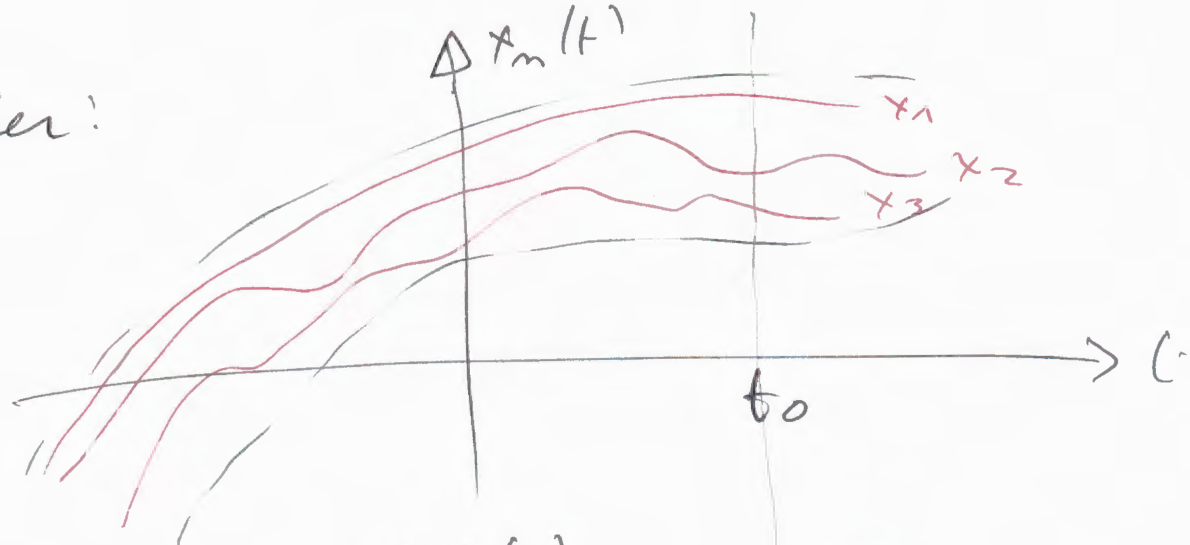
3.3: Stochastische Vorgänge

3.3.1: Beschreibung

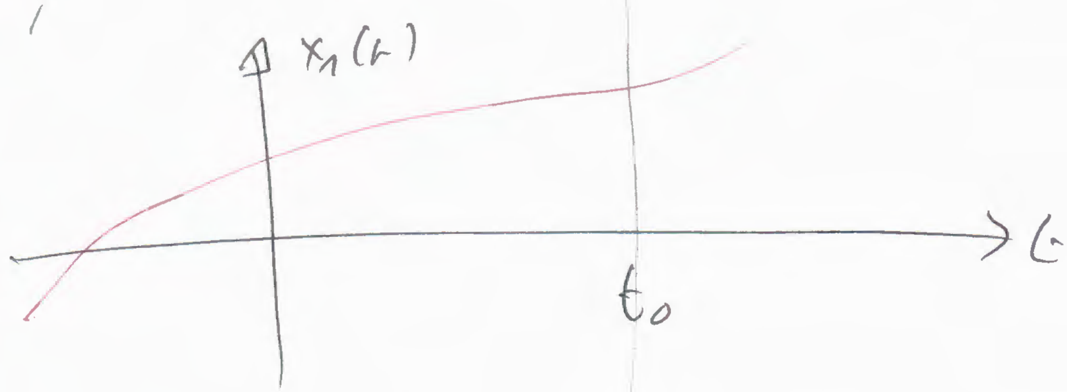
Beispiel: Rauschen

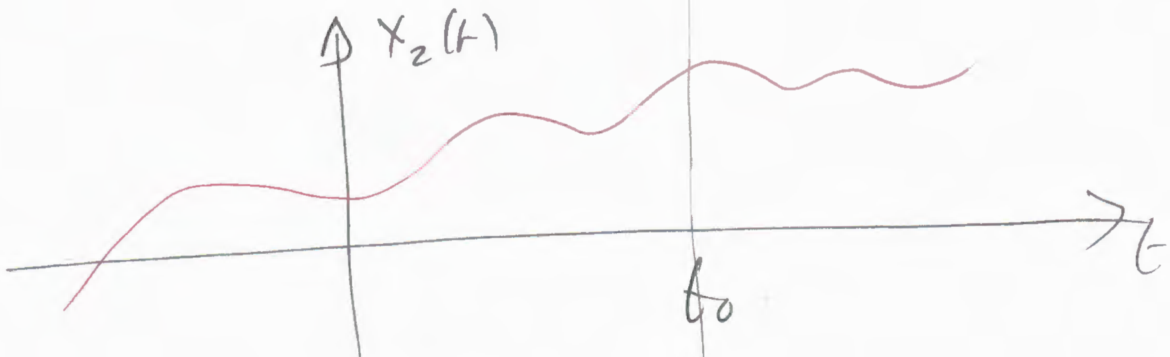
Ein stochastischer Vorgang wird mit Hilfe einer Schar von Funktionen beschrieben.

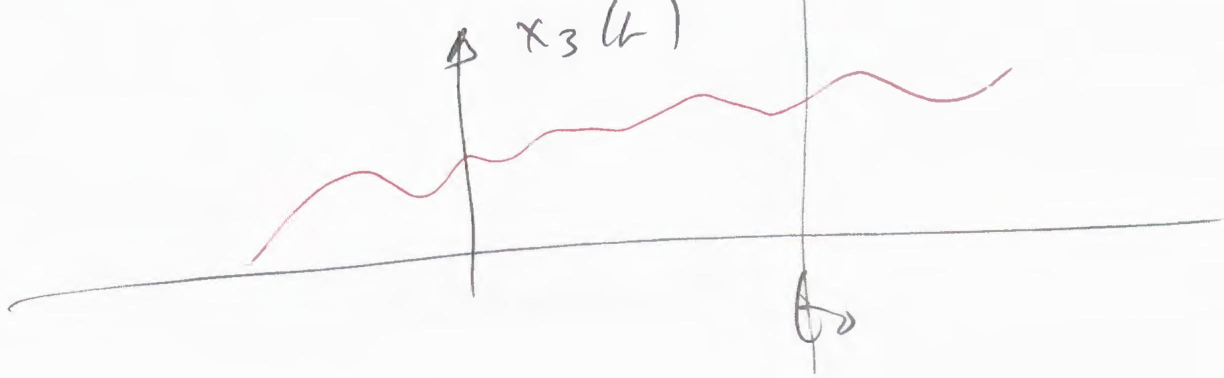
Entweder:



Oder



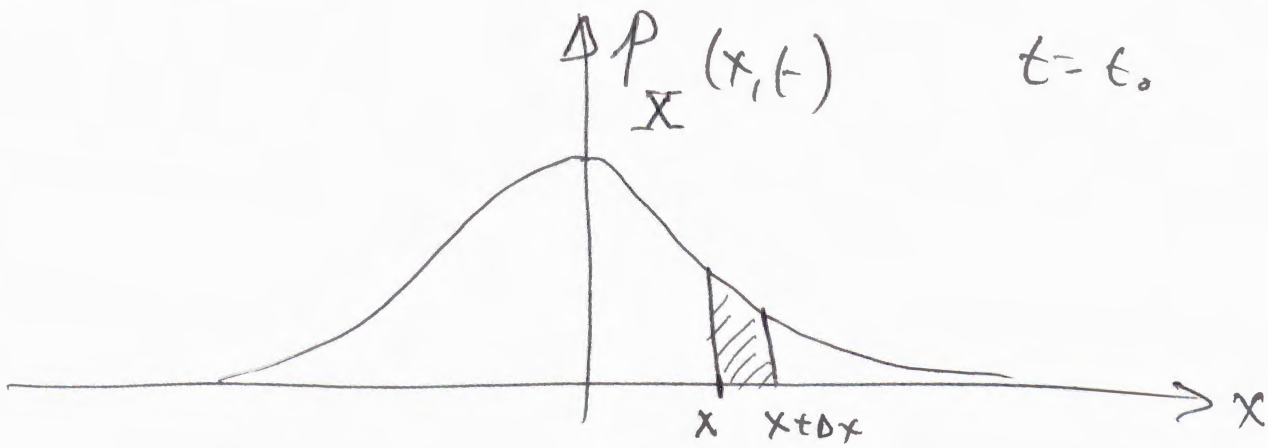




Am Zeitpunkt $t = t_0$ bilden die Werte $x_n($
$n = 1, 2, \ldots$ eine Zufallsvariable $X(t_0)$

$$X(t_0) = \{ x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ \ldots \text{ etc} \}$$

In der Regel, ist diese Zufallsvariable kontinuierlich: Sie wird mit Hilfe einer zeitabhängigen Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_X(x,t)$ beschrieben.



$$P\{ x \leq X(t_0) < x + \Delta x \} = p_X(x, t_0)\, \Delta x$$

Wir werden uns nun mit zwei Sorten von Mittelwerten (Erwartungswert) beschäftigen.

- Statistische Mittelwerte

$$\langle X(t_0)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \, p_X(x, t_0)\, dx$$

$$\langle X^2(t_0)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, p_X(x, t_0)\, dx$$

⋮

etc

Im Allgemeinen sind dieser Mittelwerte Zeitabhängig.

- Temporale Mittelwerte

Diese gelten für jede Probefunktion $x_n(t)$

$$\bar{x}_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x_n(t)\, dt$$

$$\overline{x_n^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x_n^2(t)\, dt \qquad \ldots \text{etc}$$