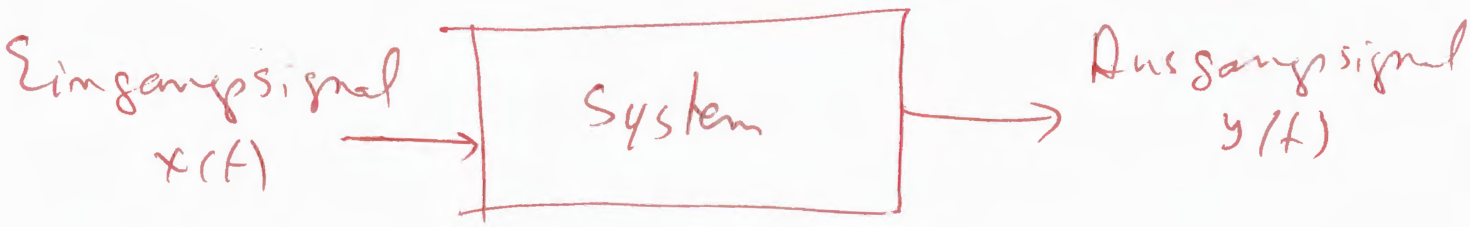
Vorlesung am 09.11.05 -1- 5-V

KT-I 05/06

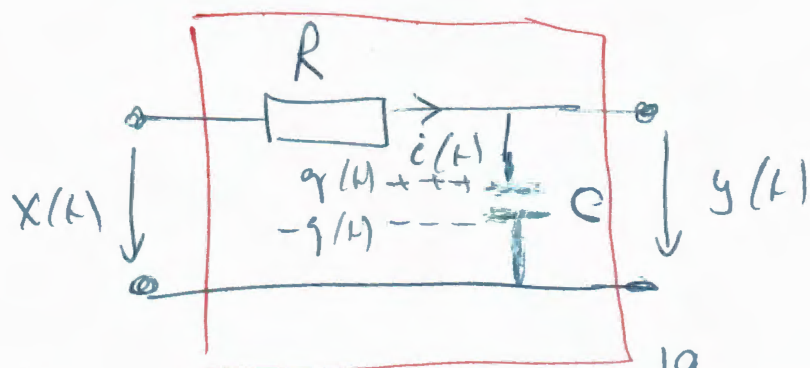
# Kapitel 2: System-Beschreibung im Zeit- und Frequenz-Bereich

## 2.1: Die Übertragungsfunktion




Das System ist vollständig beschrieben, wenn y(t) für beliebiges x(t) durch die Beschreibung bestimmt werden kann. Dies wird in der Regel mit Hilfe von Differentialgleichungen DG erreicht:

Beispiel 1:



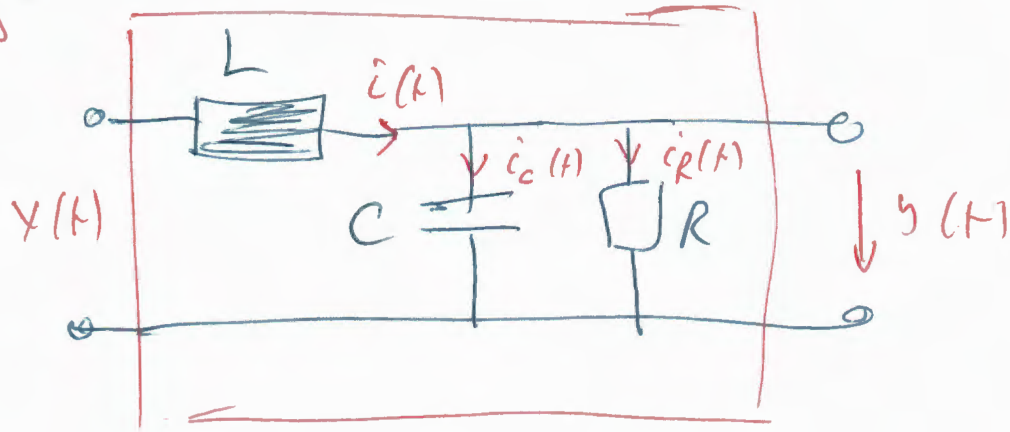

$x(t) = R \cdot i(t) + y(t)$ $\qquad i(t) = \frac{dq}{dt}$

$q(t) = C\, y(t) \implies x(t) = RC \frac{dy}{dt} + y(t)$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} + \frac{1}{RC}\, y(t) = \frac{1}{RC}\, x(t)}$$ ist eine DG

1. Ordnung

Beispiel 2:




$$x(t) = L\,\frac{di}{dt} + y(t) \quad , \quad i(t) = i_C(t) + i_R(t)$$

$$i_C(t) = C\,\frac{dy}{dt} \qquad i_R(t) = \frac{y(t)}{R} \qquad \Longrightarrow$$

$$x(t) = y(t) + L\left[C\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{R}\,\frac{dy}{dt}\right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{RC}\,\frac{dy}{dt} + \frac{1}{LC}\, y(t) = \frac{1}{LC}\, x(t)}$$

diese ist eine DG 2. Ordnung.

Im Allgemeinen gilt:

$$a_M\, x^{(M)}(t) + a_{M-1}\, x^{(M-1)}(t) + \dots + a_1\, x'(t) + a_0\, x(t) =$$

$$b_N\, y^{(N)}(t) + b_{N-1}\, y^{(N-1)}(t) + \dots + b_1\, y'(t) + b_0\, y(t)$$

wobei $x^{(m)}(t) = \frac{d^{(m)} x}{dt^m}$ , $y^{(n)}(t) = \frac{d^{(n)} y}{dt^n}$.

Da $\mathcal{F}\{x^{(m)}(t)\} = (j\omega)^m X(\omega)$

$\mathcal{F}\{y^{(n)}(t)\} = (j\omega)^n Y(\omega)$

führt die Fourier-Transformation der DG zu

$$\underbrace{\left[a_M (j\omega)^M + a_{M-1} (j\omega)^{M-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0\right]}_{\text{Polynom } P_M(j\omega)} X(\omega) =$$

$$\underbrace{\left[b_N (j\omega)^N + b_{N-1} (j\omega)^{N-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0\right]}_{\text{Polynom } Q_N(j\omega)} Y(\omega)$$

$$\Longrightarrow Y(\omega) = \underbrace{\frac{P_M(j\omega)}{Q_N(j\omega)}}_{\text{die Übertragungsfunktion } H(\omega)} \cdot X(\omega)$$

$$\boxed{Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)}$$

Für die Bestimmung des Ausgangssignals $y(t)$

für ein vorgegebenes Eingangssignal $x(t)$ geht man wie folgt vor:

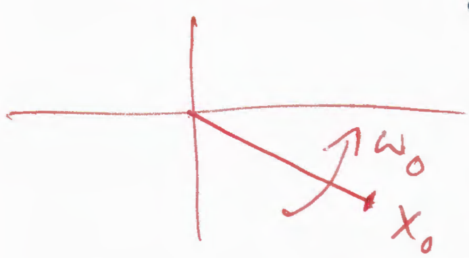
1-) Bestimmen Sie $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$

2-) Bestimmen Sie $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$, wobei $H(\omega)$ die bekannte Übertragungsfunktion des Systems ist

3-) Bestimmen Sie $y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$

## 2.2: Bestimmung der Übertragungsfunktion

$$x(t) = X_0\, e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{H(\omega) = ?} \longrightarrow y(t) = ?$$



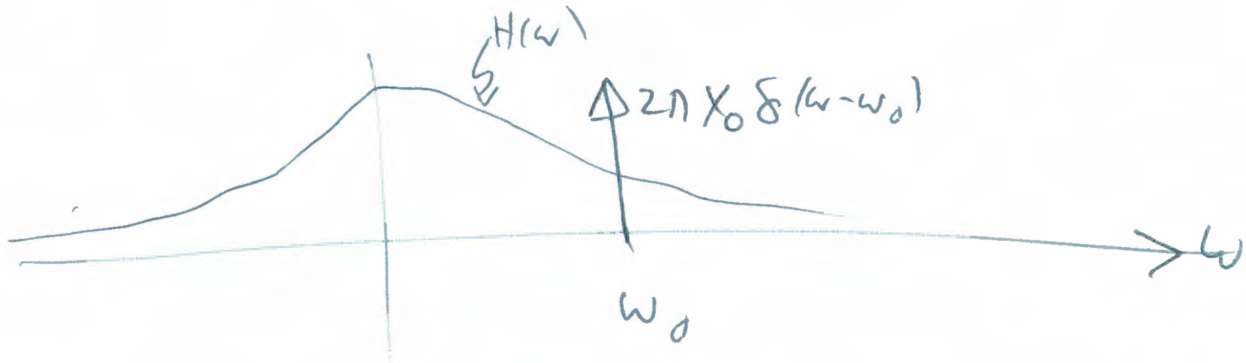

Man regt das System durch einen rotierenden

Phasor $x(t) = X_0 e^{j\omega_0 t}$ an.

Nun:

1-) $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = X_0 \cdot 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$

2-) $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) = 2\pi X_0 H(\omega_0)\,\delta(\omega - \omega_0)$



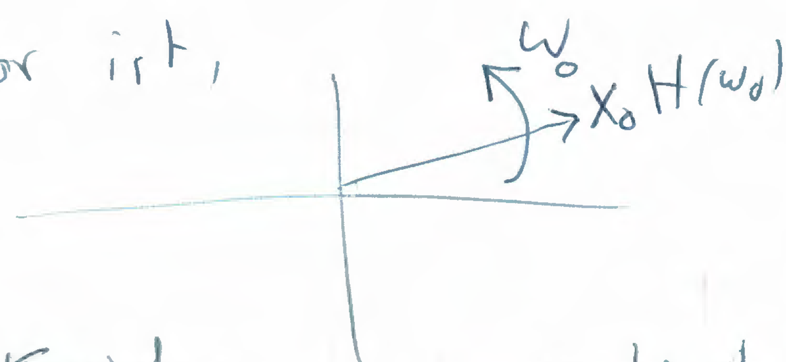

Die Multiplikation von $H(\omega)$ mal $2\pi X_0\,\delta(\omega - \omega_0)$ selektiert $H(\omega_0)$ aus.

3-) $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\}$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{2\pi} X_0 H(\omega_0)\,\delta(\omega - \omega_0)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= X_0 H(\omega_0)\, e^{j\omega_0 t}$$

Dies bedeutet, daß das Ausgangsignal ebenfalls ein rotierender Phasor ist,




der mit der gleichen Kreisfrequenz $\omega_0$ rotiert.

Das Verhältnis $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{X_0 e^{j\omega_0 t} H(\omega_0)}{X_0 e^{j\omega_0 t}}$

$$= H(\omega_0)$$

ist die Übertragungsfunktion bei $\omega = \omega_0$

Da $H(\omega) = \dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)} \Rightarrow H(-\omega) = \dfrac{Y(-\omega)}{X(-\omega)} = \dfrac{Y^*(\omega)}{X^*(\omega)}$

$$= H^*(\omega)$$

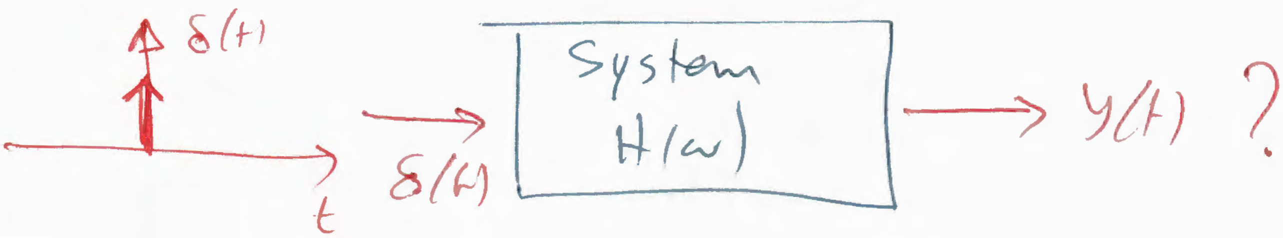
$$\Rightarrow |H(\omega)| = |H(-\omega)|$$

$$\angle H(\omega) = -\angle H(-\omega)$$

Oder $H(\omega) = H'(\omega) + j H''(\omega)$

wobei $H'(\omega) = H'(-\omega)$ ; $H''(\omega) = -H''(-\omega)$

## 2.3: Die Impuls-(Stoß) Antwort



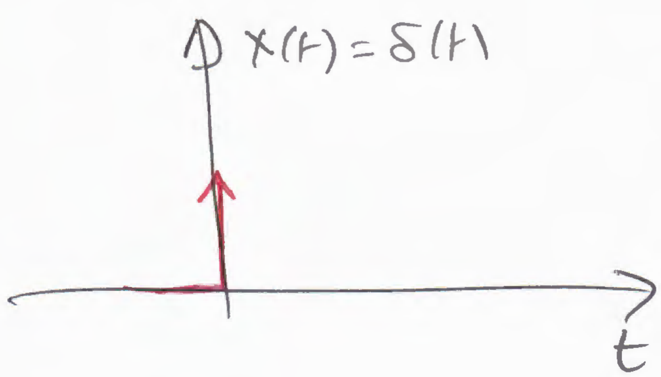
1-) $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$

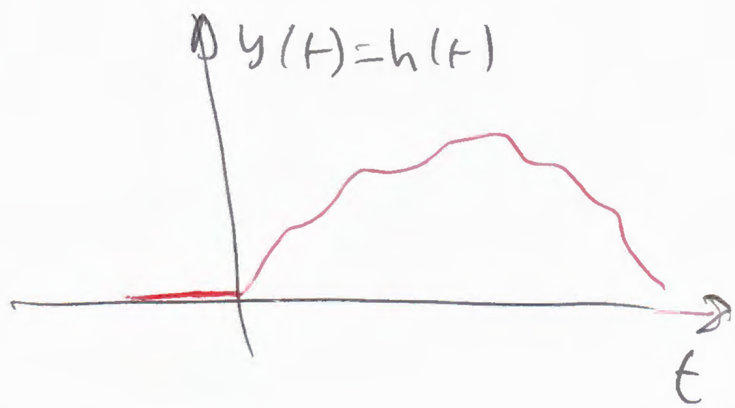
2-) $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) = H(\omega)$

3-) $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = h(t)$

$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$ ist die Impulsantwort des Systems

Wegen der Kausalität, muß $h(t) = 0$ für $t < 0$ sein.




Nun, wegen $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$

haben wir $y(t) = h(t) * x(t)$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\, h(t-t')\, dt'$$

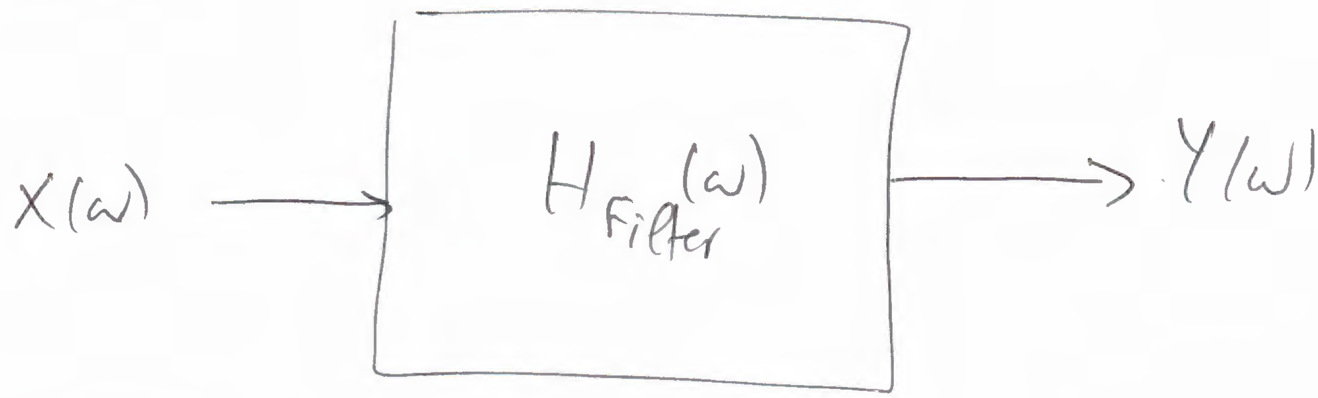
Da $h(t-t') = 0$ für $t' > t$ $\Longrightarrow$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t')\, h(t-t')\, dt'}$$

Dies bedeutet, daß $y(t)$ Information über $x(t')$ nur bis $t' = t$. Die Zukunft von $x(t')$ über $t' = t$ hinaus ist in $y(t)$ nicht enthalten.

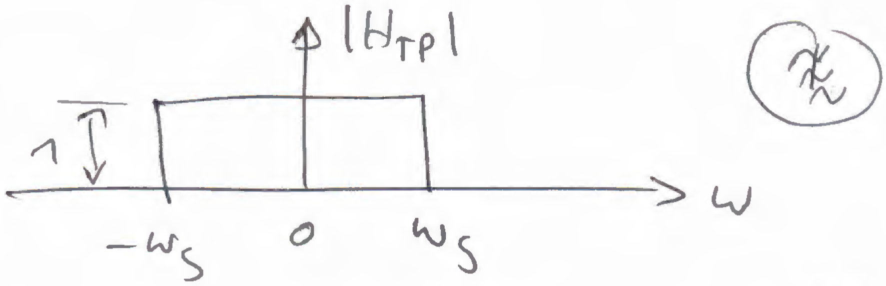
## 2.4: Filter

Filter sind Systeme, die das Spektrum umformen. Sie lassen bestimmte Frequenz komponenten zu und vernichten andere Frequenzkomponenten.

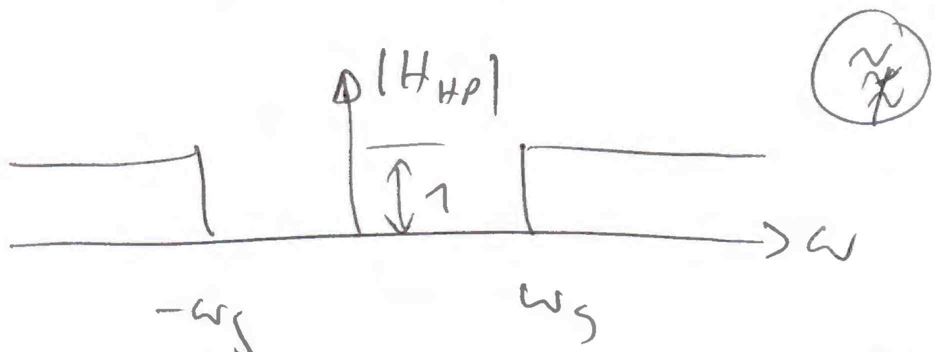



## 2.5.1 : Ideale Filter

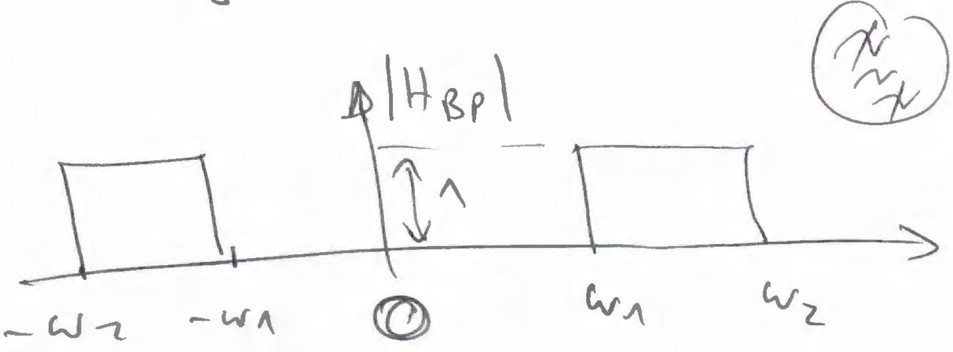
— TPF



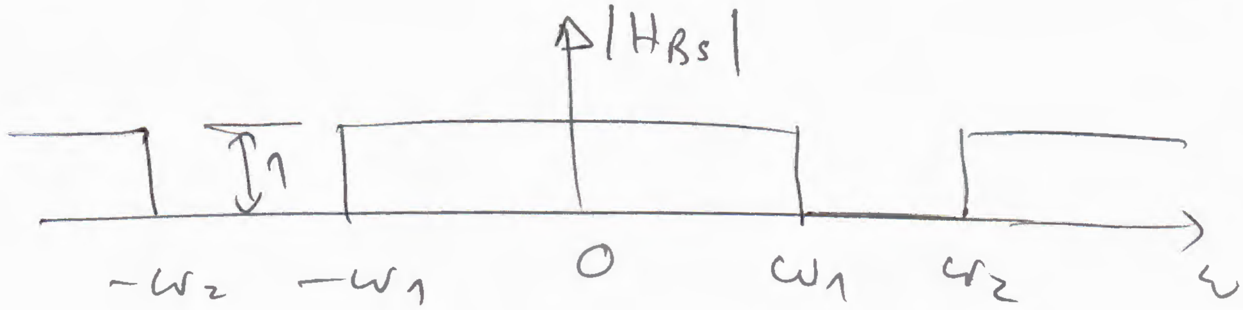

— HPF




— BPF



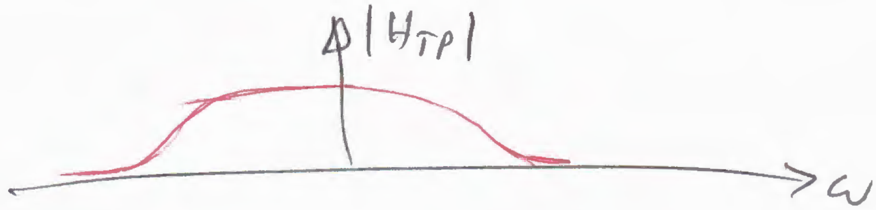
- BSF

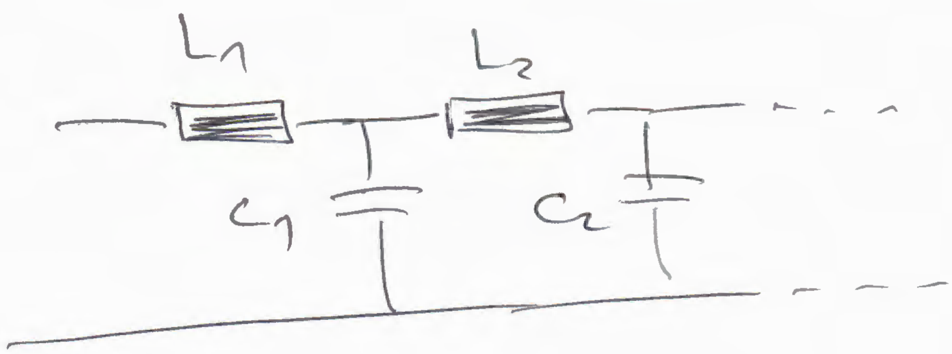



Wegen der Verletzung der Kausalität sind ideal Filter nicht realisierbar.

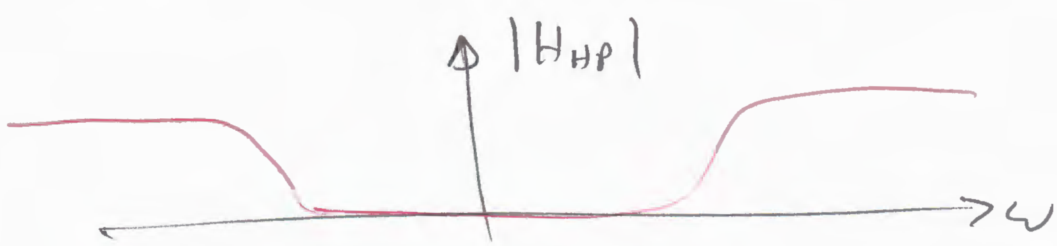
Realisierbare Filter haben abgerundete Kanten

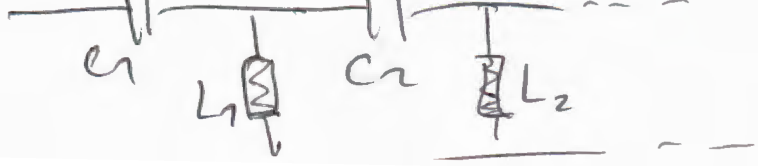
TPF



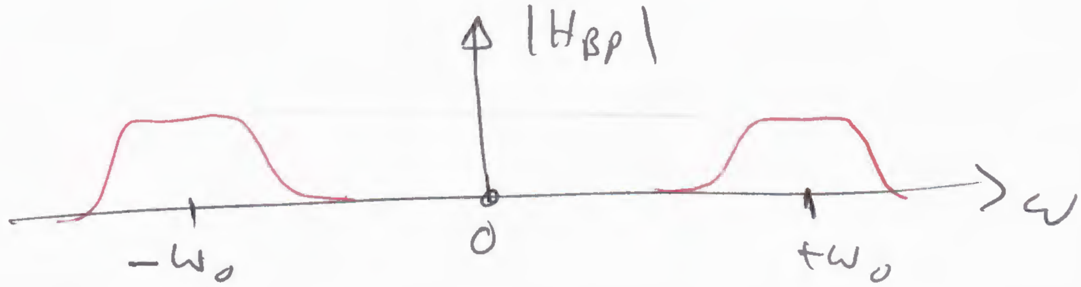



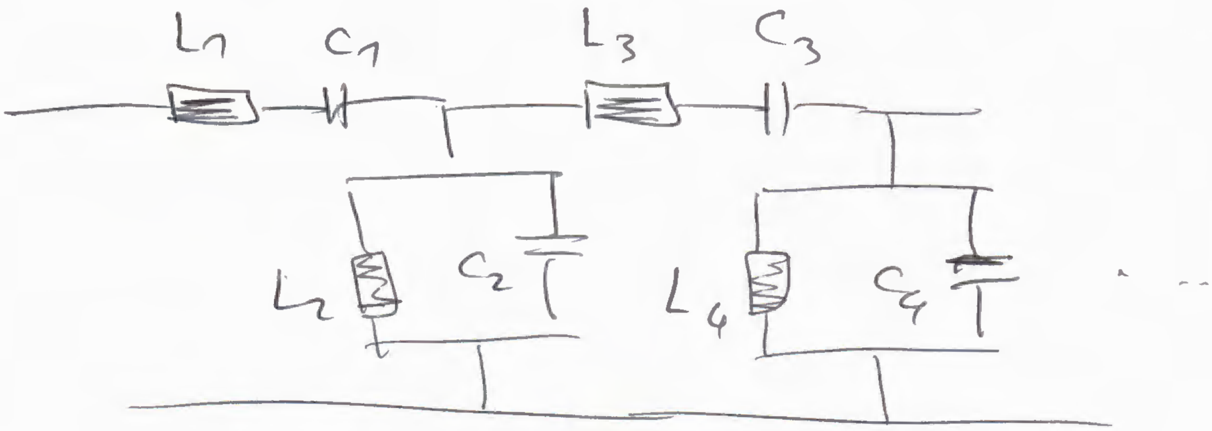

HPF



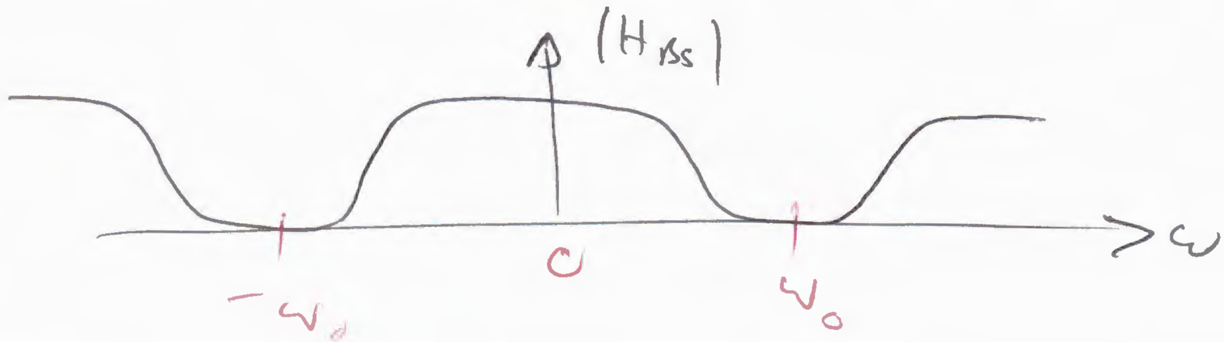



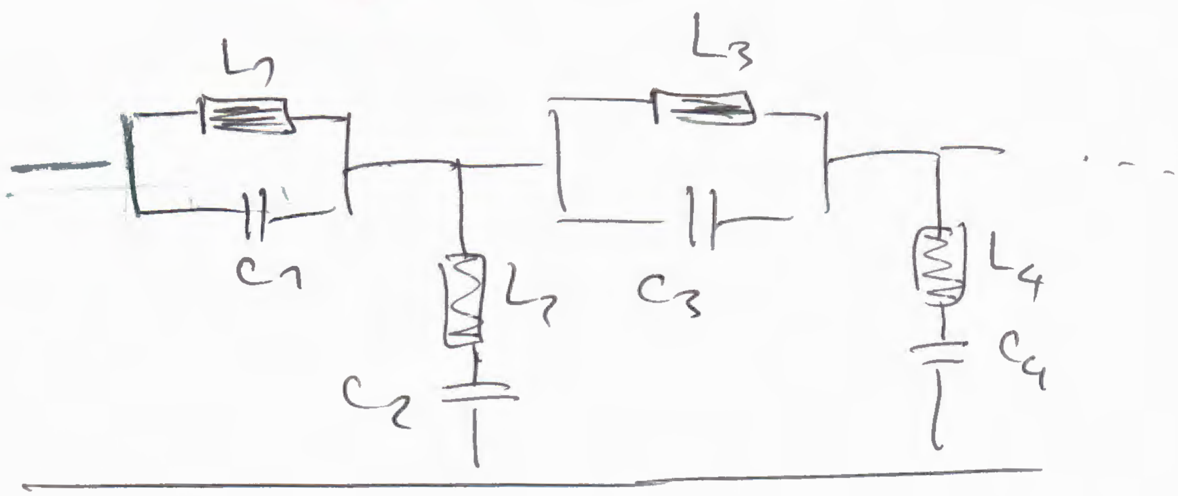
BPF


|H_BP|
ω
-ω₀
0
+ω₀


L1
C1
L3
C3
L2
C2
L4
C4
. . .

BSF


|H_BS|
ω
-ω₀
0
ω₀


L1
L3
C1
L2
C3
L4
C2
C4
. . .