Vorlesung am 02.11.05

(4. V)

KT – I
05/06

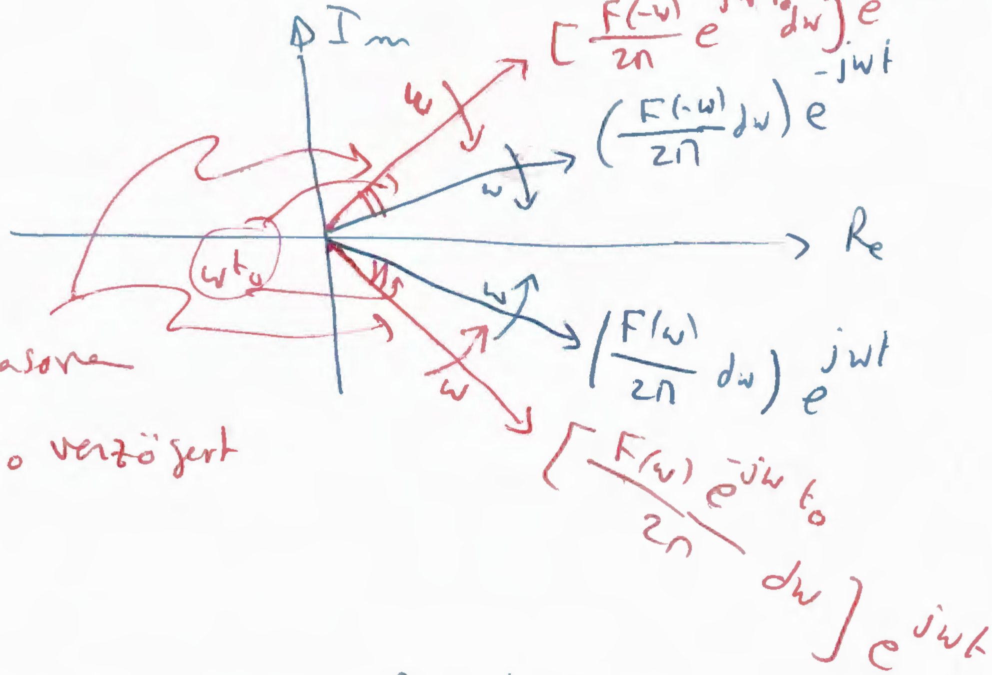
1.4.3: Zeitverzögerung

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{Kanal z.B. Funkstrecke}} \longrightarrow f(t-t_0)$$

$t_0 = \frac{\ell}{c}$; ℓ = Länge der Funkstrecke ; c = Lichtgeschwindigkeit

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\, e^{-j\omega t}\, dt = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\, e^{-j\omega (t-t_0)}\, dt$$

$$= e^{-j\omega t_0} \cdot \mathcal{F}\{f(t)\}$$

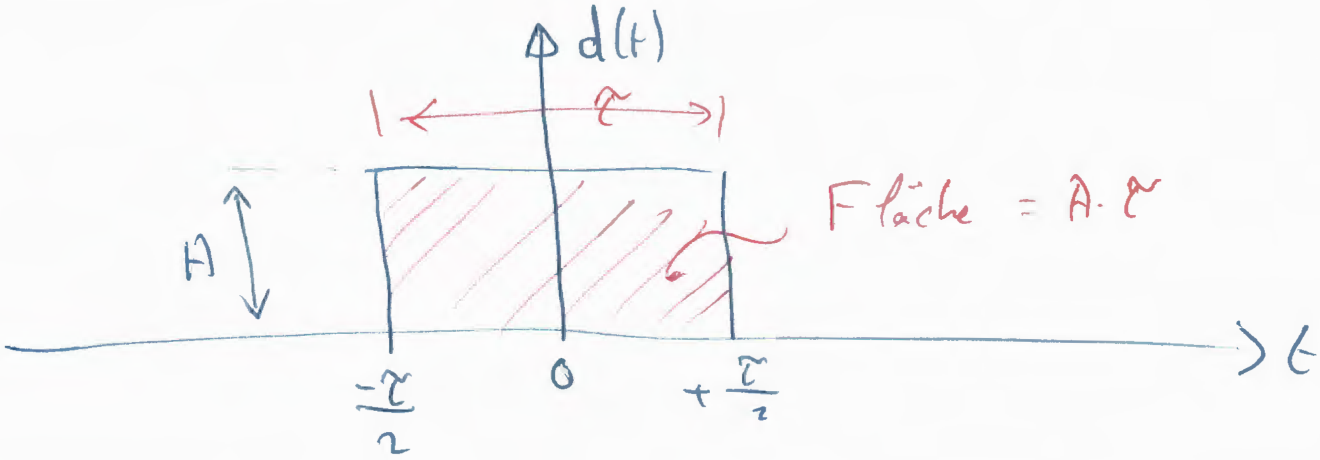


die zwei Phasoren sind um t_0 verzögert

1.4.4: Die Unschärfe-Relation

– Die Dirac-Delta-Funktion

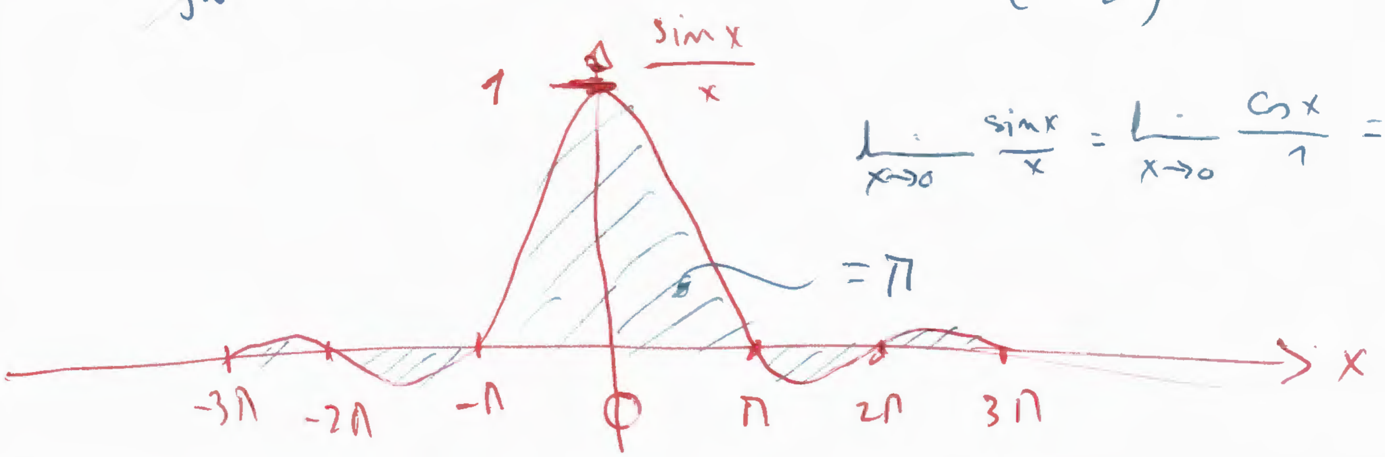
Wir betrachten einen Puls im Zeitbereich



Die entsprechende Fourier-Transformation $D(\omega)$ lautet:

$$D(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\tau/2} A\, e^{-j\omega t}\, dt = \frac{A}{-j\omega}\, e^{-j\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}}$$

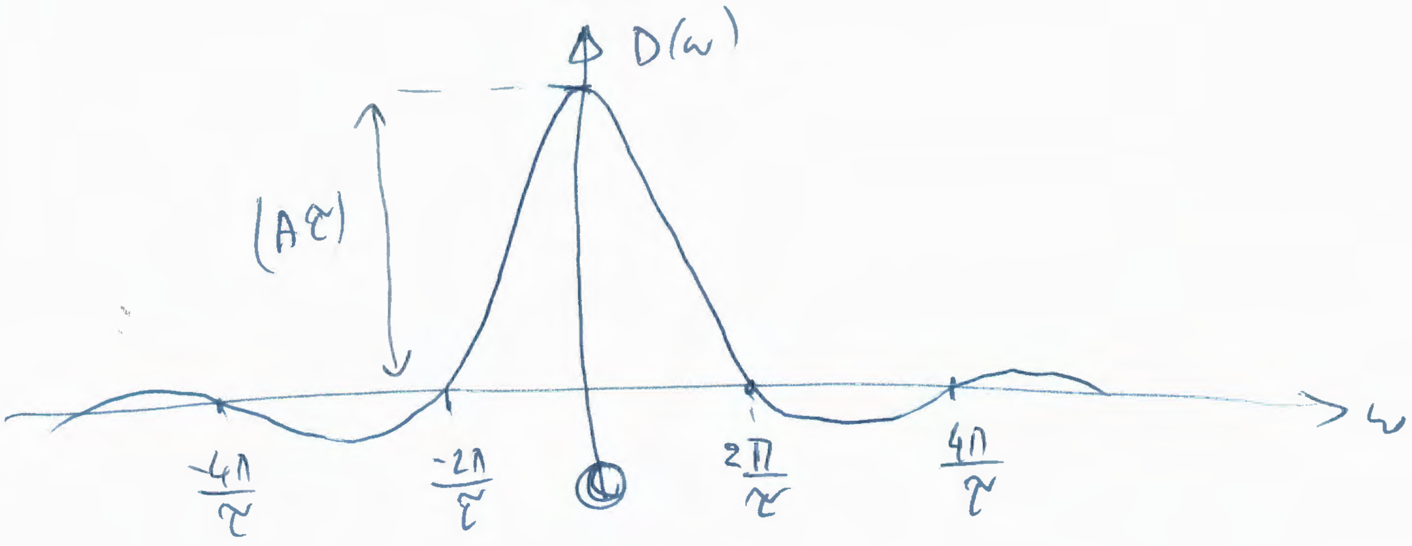
$$= \frac{A}{\cancel{-j}\omega} \cdot \cancel{-j}2 \sin \omega \frac{\tau}{2} = (A\tau)\,\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}$$



$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

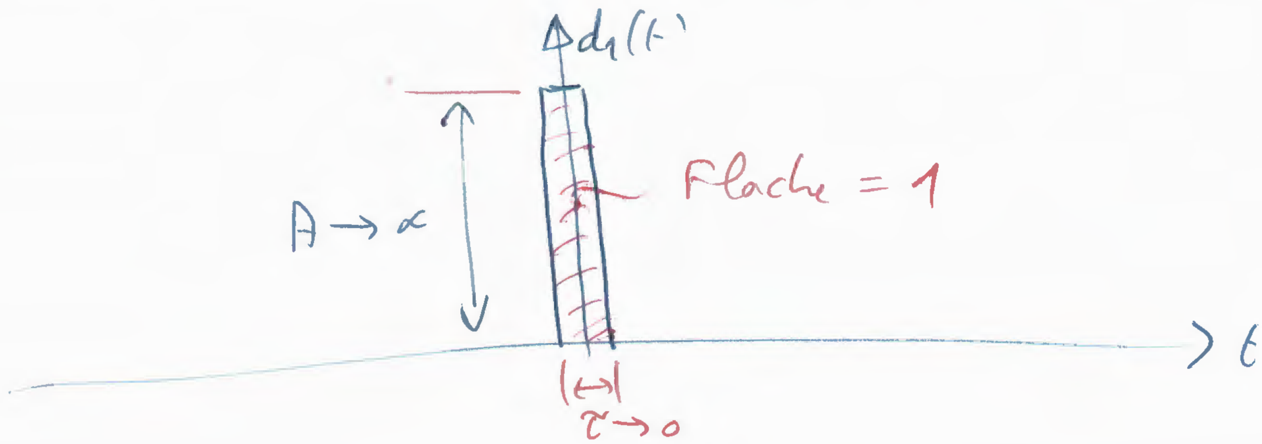
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi$$

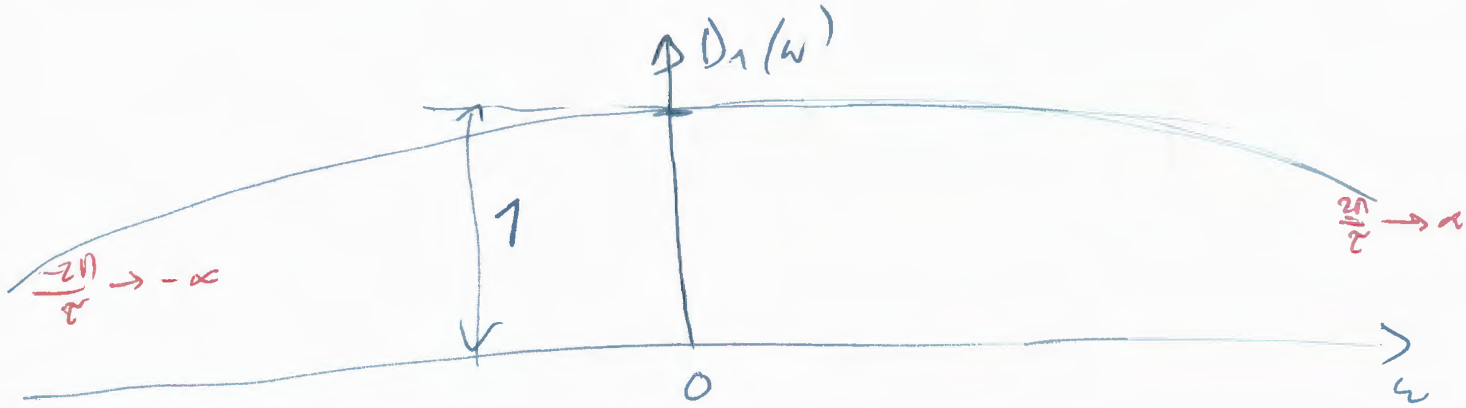
$\Longrightarrow$



Wir betrachten nun zwei Fälle:

1.) $(\tau A) = 1$; $\tau \to 0$ (d.h. $A \to \infty$)





Der Puls $d_1(t)$ wird Dirac-Delta genannt und mit $\delta(t)$ bezeichnet

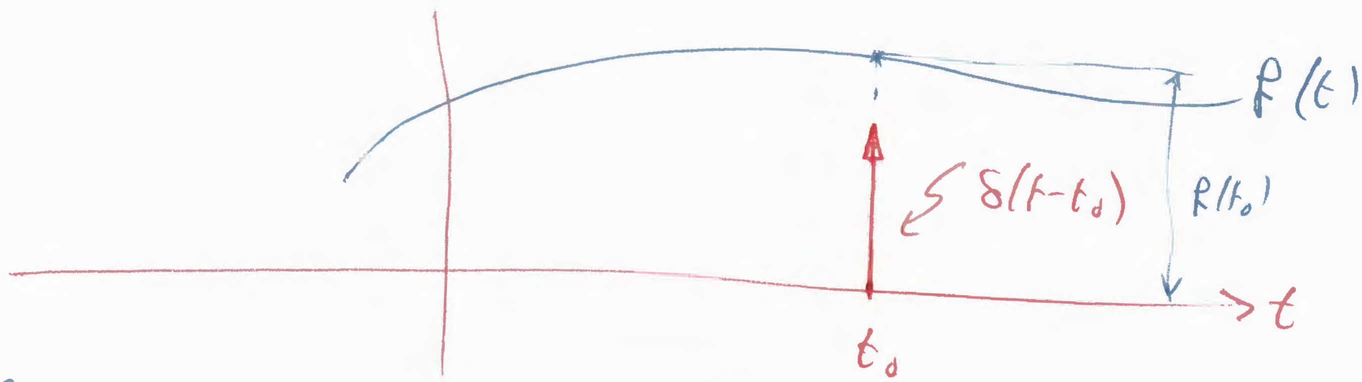
$$\lim_{\tau \to 0} d_1(t) = \delta(t)$$

$$\lim_{\tau \to 0} D_1(\omega) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

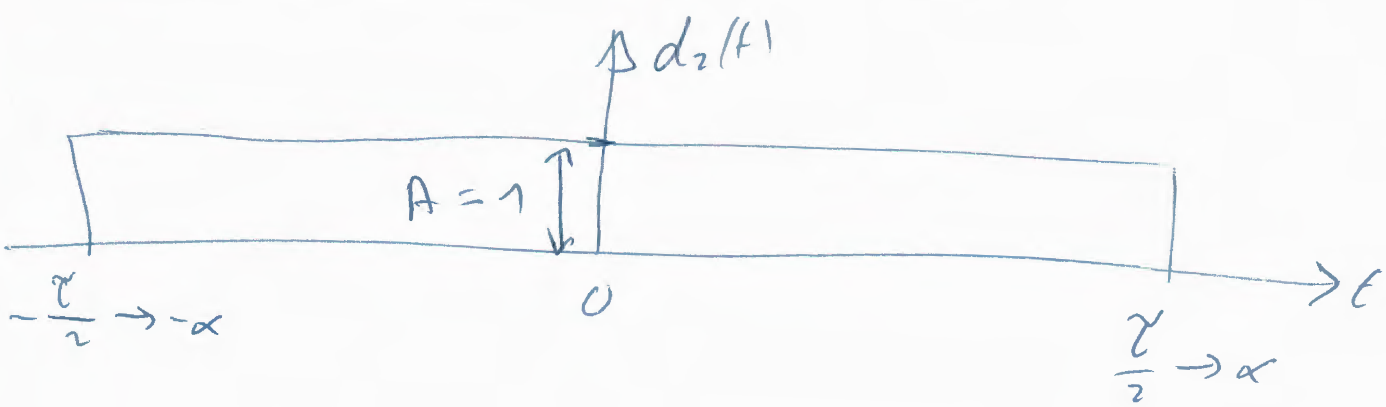
Wichtige Eigenschaft von $\delta(t)$:

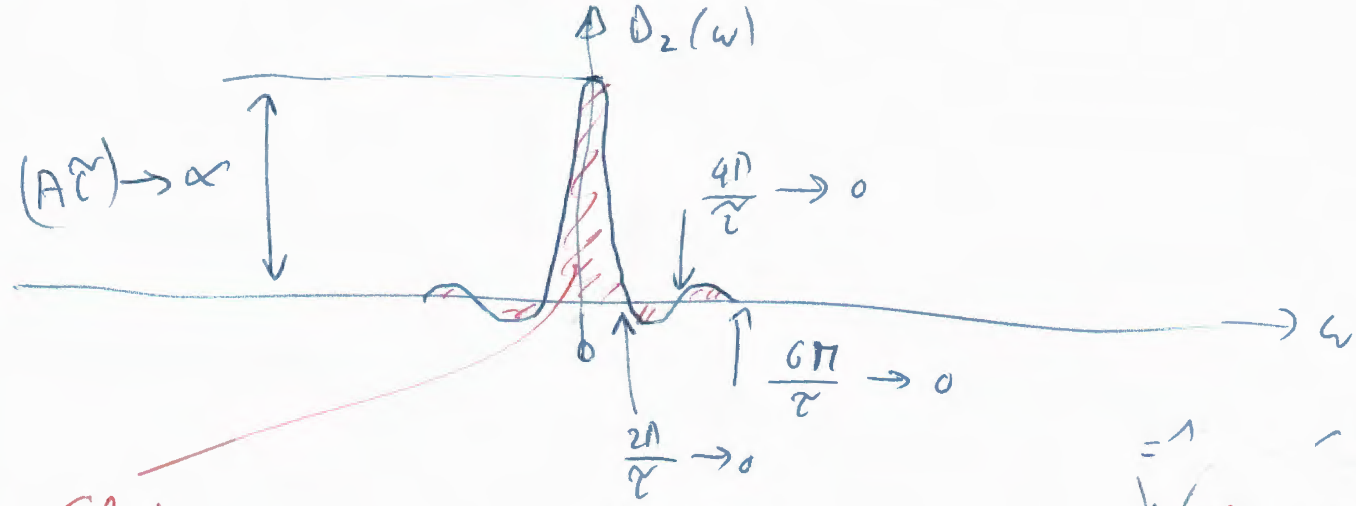


$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

Deshalb wird $\delta(t)$ die Abtastfunktion genannt

2-) $A = \text{konst} = 1$; $\tau \to \infty$





$$\text{Fläche} = \lim_{\tau \to \infty} (A\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}\, d\omega = \lim_{\tau \to \infty} \overset{=1}{2A} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}\, d\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}_{=\pi}$$

$$= 2\pi$$

$$\Longrightarrow \lim_{\tau \to \infty} d_2(t) = 1 \qquad \lim_{\tau \to \infty} D_2(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}\{1\} = 2\pi\,\delta(\omega)$$

Diskussion über die Unschärfe-Relation und die Quanten-Mechanik.

Folgen:

Folge 1: Da $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$, $\mathcal{F}\{R(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} \cdot \mathcal{F}\{R(t)\}$

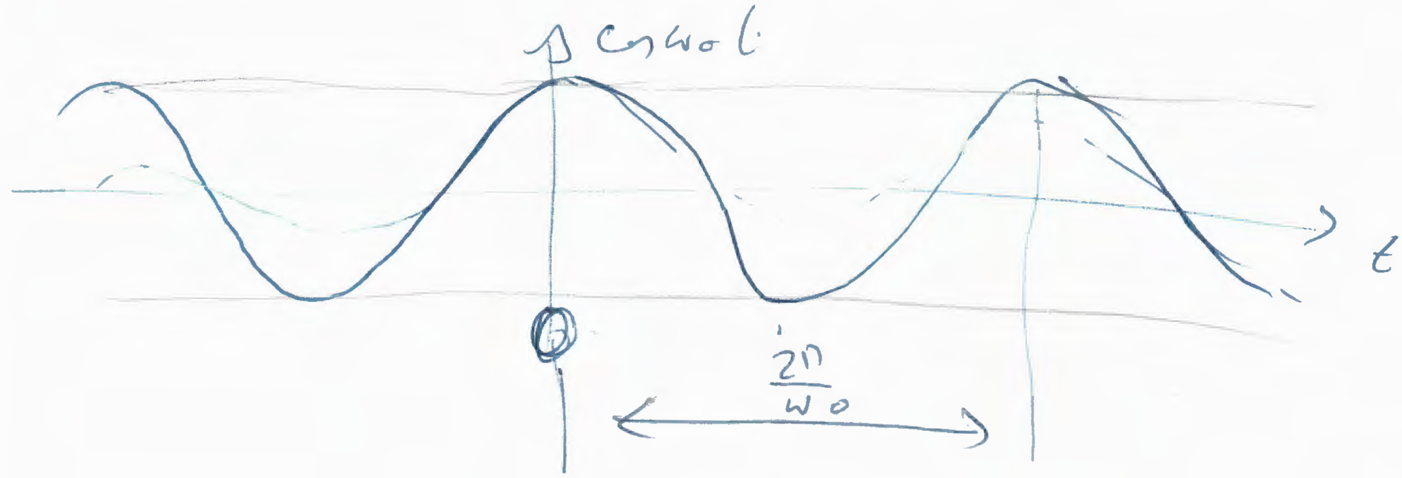
dann $\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0}$

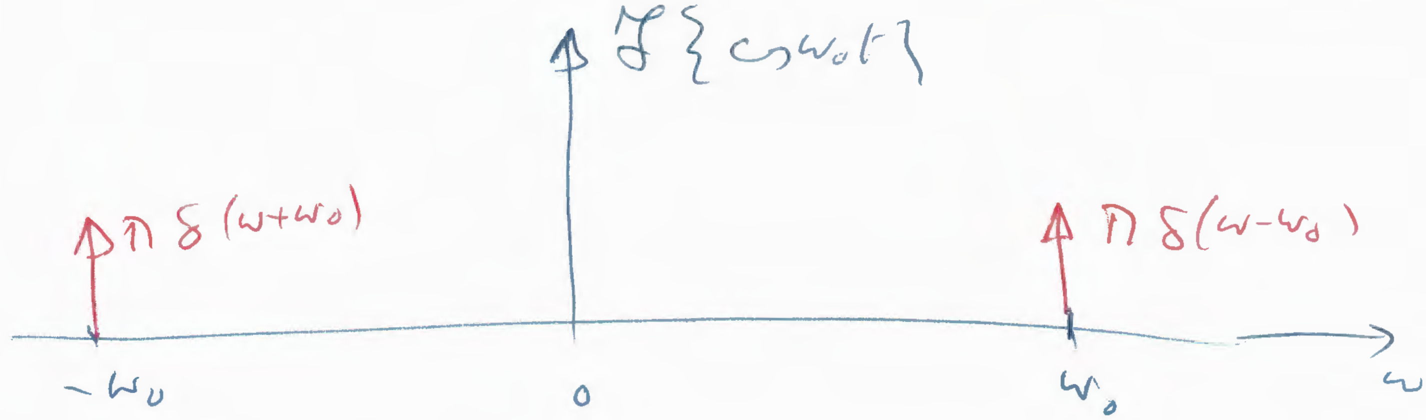
$= \cos \omega t_0 - j \sin \omega t_0$

Folg. 2: Da $\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$; $\mathcal{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\}$
$= F(\omega-\omega_0)$

dann $\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\} = \mathcal{F}\{\tfrac{1}{2}[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]\}$$
$$= \frac{1}{2}\left[2\pi\,\delta(\omega-\omega_0) + 2\pi\,\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

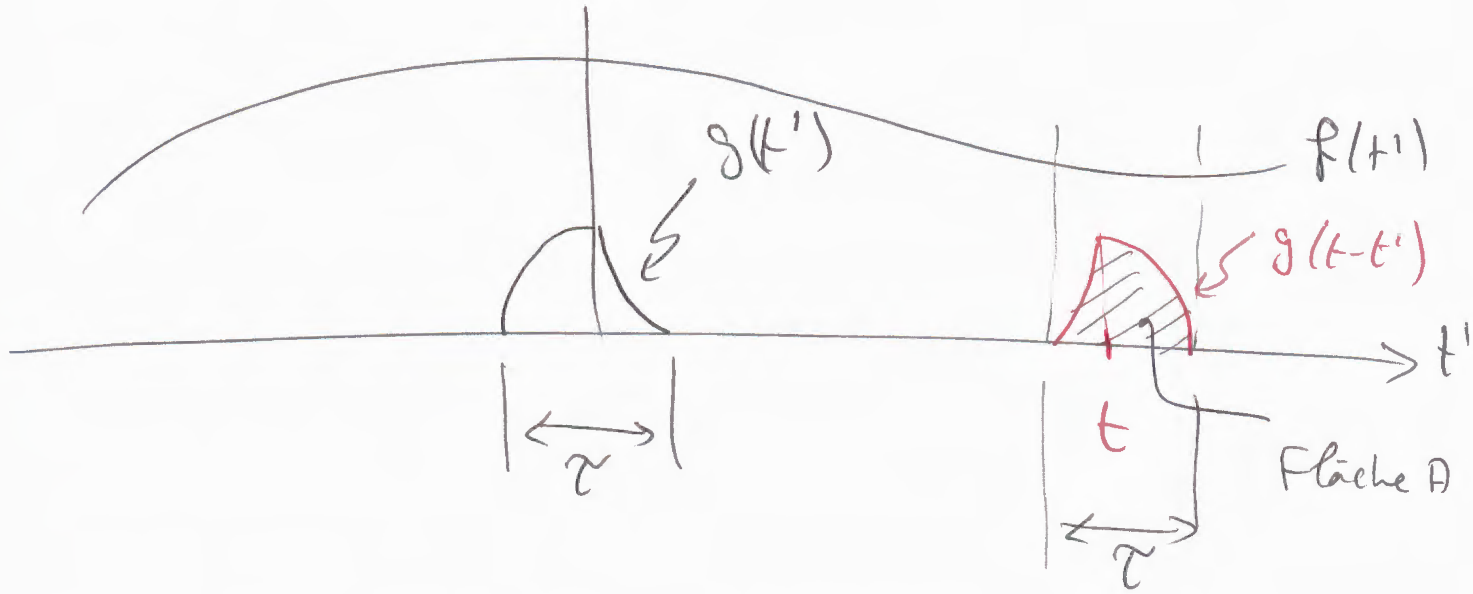




7.4.5: Die Faltung

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\,g(t-t')\,dt' = \int_{-\infty}^{\infty} g(t')\,f(t-t')\,dt'$$

– graphische Bedeutung



$$f(t) * g(t) \simeq \int_{|t'-t| \leq \tau} f(t')\, g(t-t')\, dt'$$

$$\simeq f(t) \int_{|t'-t| \leq \tau} g(t-t')\, dt'$$

falls $f(t') \simeq \text{konst} = f(t)$ für

$|t'-t| \leq \tau$

$$\simeq A\, f(t)$$

– Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}\left\{ f(t) * g(t) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t')\, g(t-t')\, dt' \right] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(t-t')\, e^{-j\omega t}\, dt}_{\substack{\tau = t - t' \\ d\tau = dt \\ t = \tau + t'}} \Big] dt' = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \Big[e^{-j\omega t'} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau}_{G(\omega)} \Big] dt'$$

$$= G(\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t')\, e^{-j\omega t'}\, dt'}_{F(\omega)}$$

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = F(\omega) \cdot G(\omega)$$

<u>Ähenlich</u> $\mathcal{F}\{f(t) \cdot g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \underbrace{\Big[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega')\, e^{j\omega' t}\, d\omega' \Big]}_{f(t)} e^{-j\omega t}\, dt$$

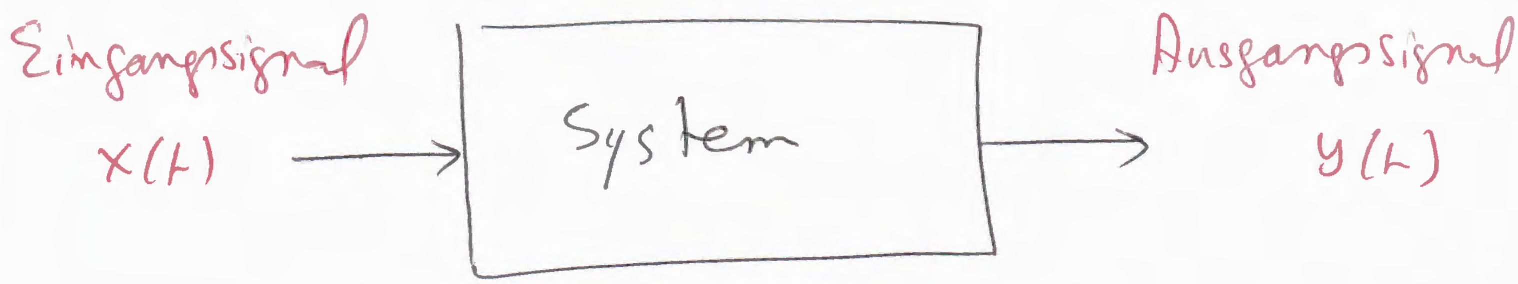
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') \Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-j(\omega-\omega')t}\, dt}_{G(\omega-\omega')} \Big] d\omega'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega')\, G(\omega-\omega')\, d\omega' = F(\omega) * G(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f(t) \cdot g(t)\} = F(\omega) * G(\omega)$$

Kapitel 2: System-Beschreibung im Zeit- und Frequenz-Bereich

2.1: Die Übertragungsfunktion



Ein System (z.B. eine Schaltung oder ein Netzwerk) <u>verarbeitet</u> das Eingangssignal $x(t)$ und produziert <u>davon</u> ein Ausgangssignal $y(t)$. System-Beschreibung bedeutet eine Darstellung des Zusammenhangs z. $x(t)$ und $y(t)$