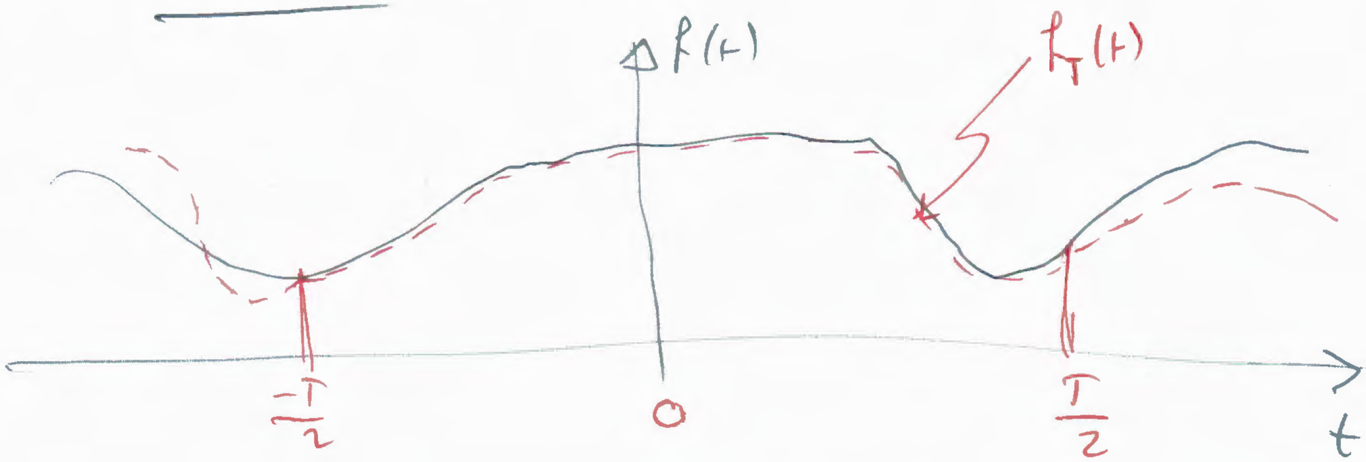
Vorlesung am 26.10.05

3.V

KT-I 05/06

1.3: Nichtperiodische Signale und die Fourier-Transformation, (Fourier-Integral)

1.3.1: Der Übergang von Fourier-Reihe zum Fourier-Integral



$f_T(t)$ wird definiert als periodisches Signal der Periode T:

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & |t| \le \frac{T}{2} \\ f(t-nT) & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$n = \mathrm{Int}\left(\frac{t}{(T/2)}\right)$

$$f(t) = \lim_{T \to \infty} f_T(t)$$

Da $f_T(t)$ periodisch ist, dann

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Delta\omega t} \quad , \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

wobei $$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt$$

$$= \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\Delta\omega t} dt$$

Wir definieren $$F_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\Longrightarrow \quad F_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi} F_T(\omega = n\Delta\omega)$$

Ebenfalls, definieren wir

$$F(\omega) = \lim_{T\to\infty} F_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Nun $$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} F_T(\omega = n\Delta\omega) e^{j(\omega = n\Delta\omega)\cdot t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_T(\omega = n\Delta\omega) e^{j(\omega = n\Delta\omega)\cdot t} \Delta\omega$$

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} f_T(t) = \lim_{\Delta\omega\to 0} f_T(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\underbrace{\lim_{T\to\infty} F_T(\omega)}_{F(\omega)} \Big] e^{j\omega t} \, d\omega$$

$$\Longrightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

wobei $\quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$

Wichtig: Da $\quad F_{-n} = F_n^*$

$$\Longrightarrow \quad F_T(\omega = -n\Delta\omega) = F_T^*(\omega = n\Delta\omega)$$

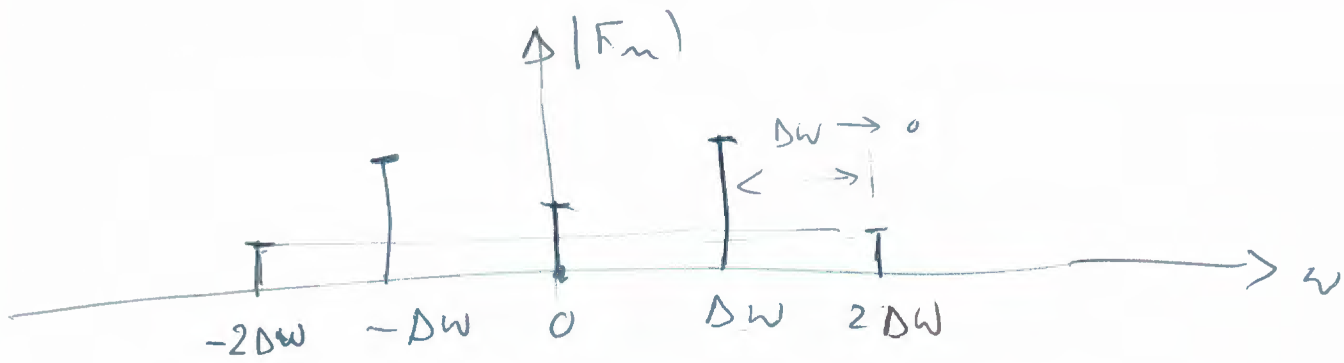
$$\Longrightarrow \quad F_T(-\omega) = F_T^*(\omega)$$

$$\Downarrow$$

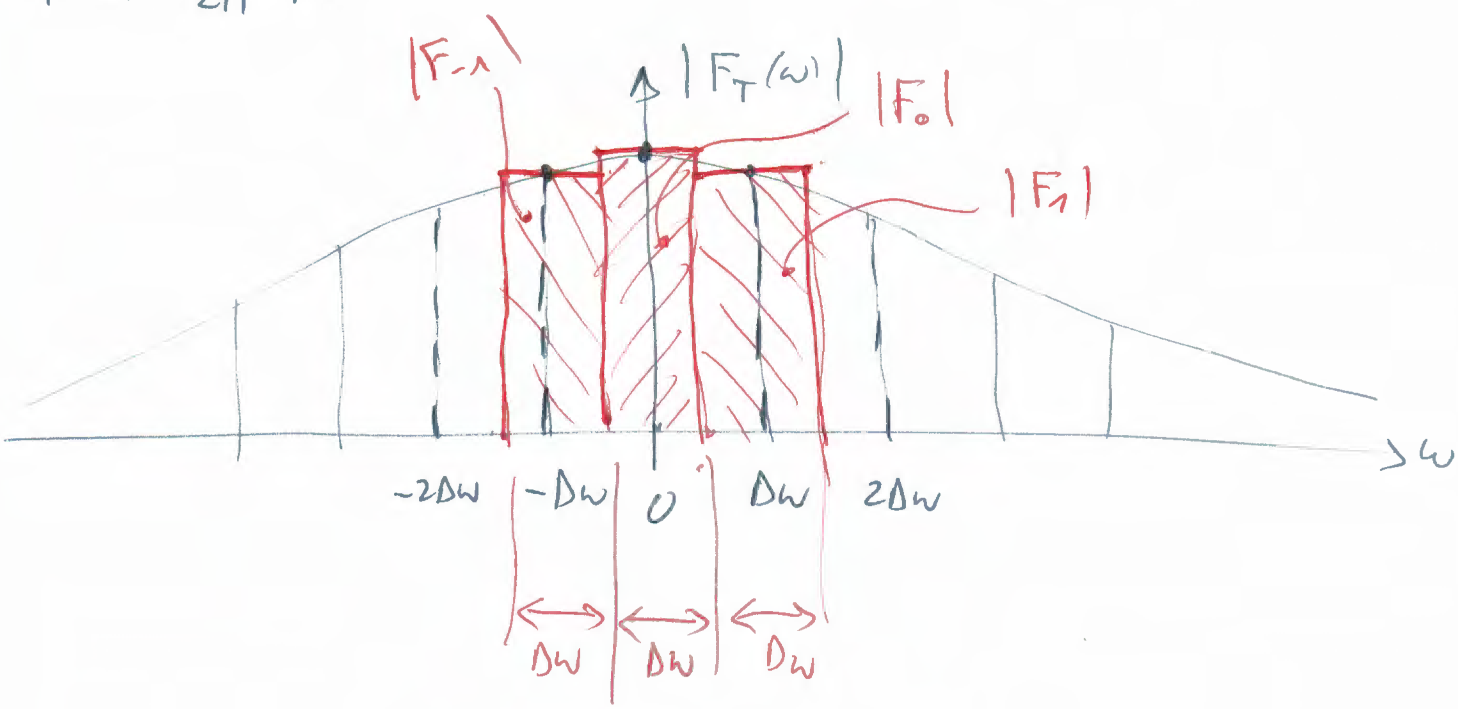
$$F(-\omega) = F^*(\omega)$$

7.3.2: Das Konzept des Spektrums

Da $\omega_0 = \Delta\omega$ der Abstand zwischen den benachbarten "Stangen" des diskreten Spektrums ist, $\Delta\omega \to 0$ bedeutet, daß das diskrete Spektrum in kontinuierliches Spektrum übergeht:



$$|F_n| = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\left|F_T(\omega = n\Delta\omega)\right|$$



Der Ausdruck $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$

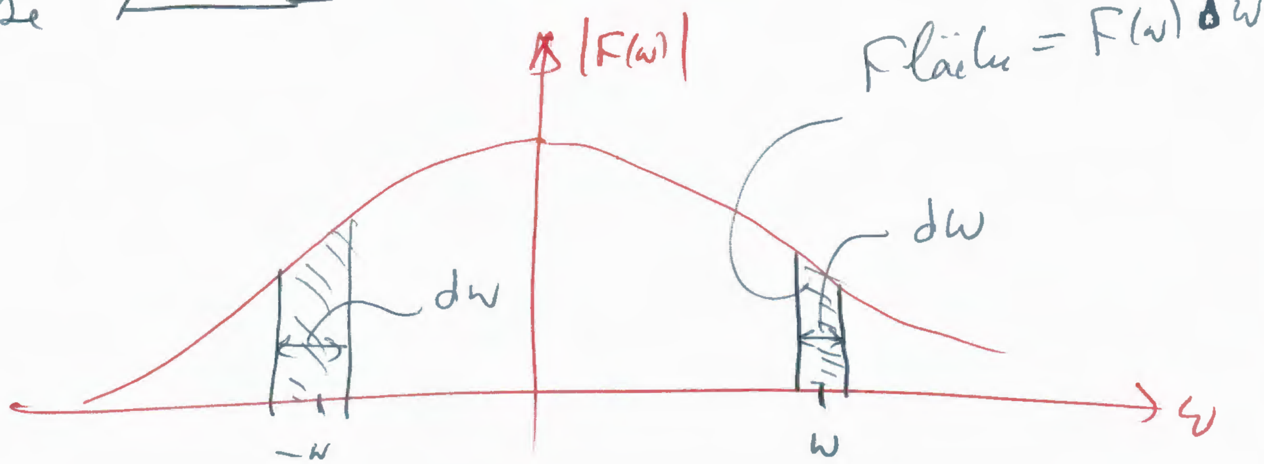
infinitesimaler Phasor

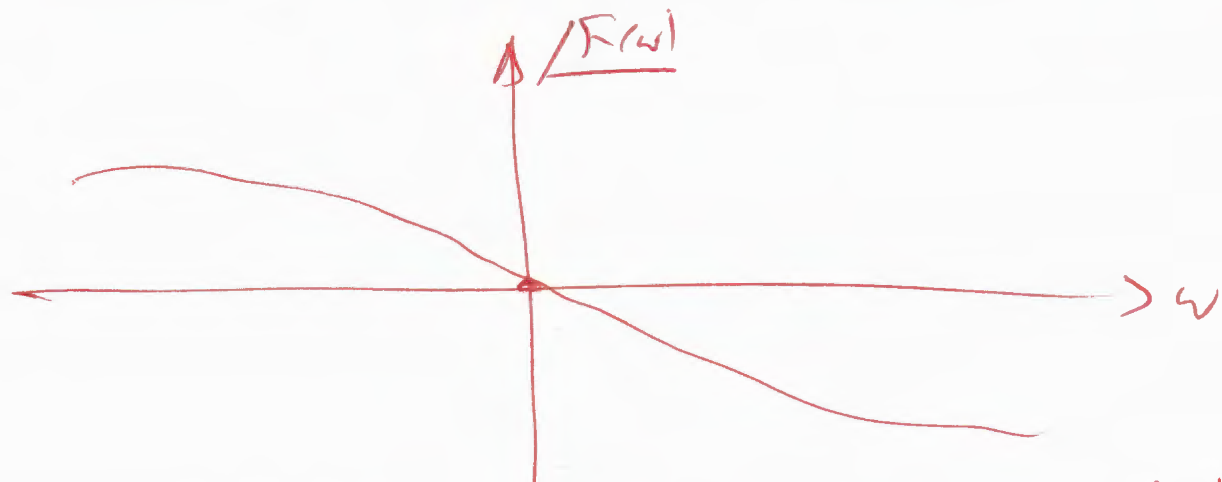
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{F(\omega)}{2\pi}\, d\omega\right] e^{j\omega t}$$

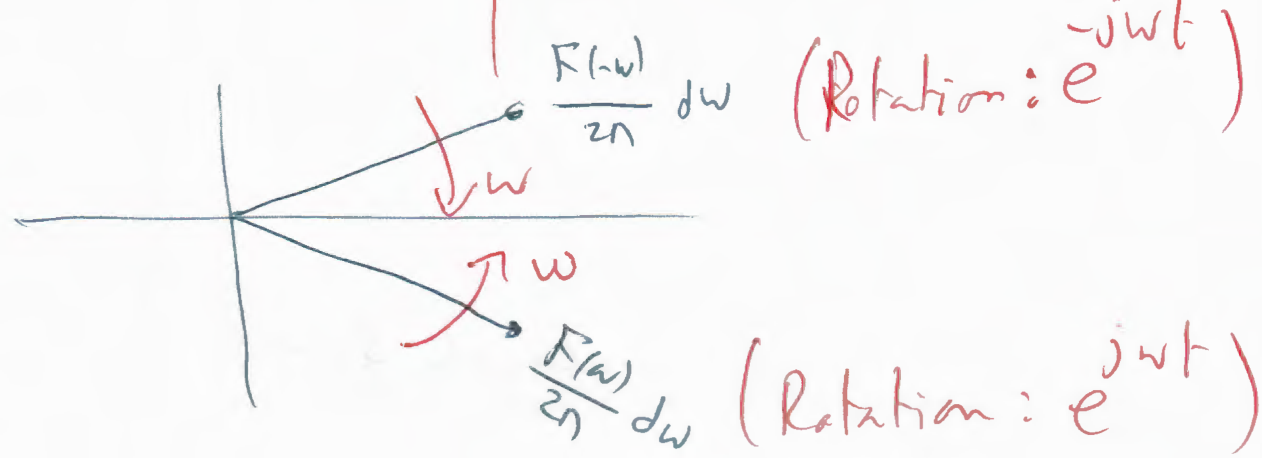
Rotations-Faktor

bedeutet, daß $f(t)$ die Summe von unendlich vielen <u>infinitesimalen</u> Phasoren $\left[\frac{F(\omega)}{2\pi} d\omega\right]$, die mit der Kreisgeschwindigkeit ω rotieren.

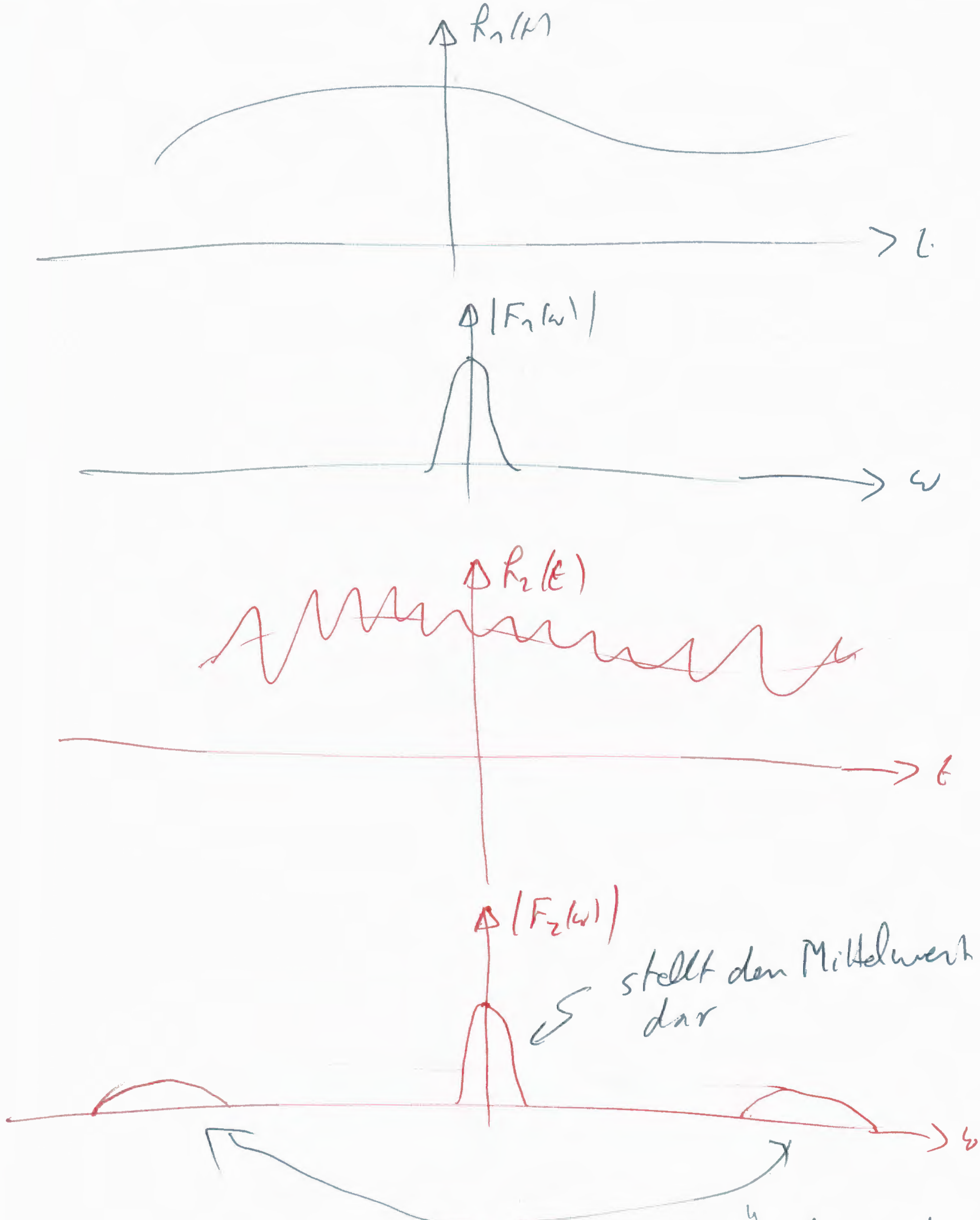
Wegen $F(-\omega) = F^*(\omega)$ ist die Summe der Phasoren $\left[\frac{F(\omega)}{2\pi}d\omega\right] e^{j\omega t}$ und $\left[\frac{F(-\omega)}{2\pi}d\omega\right] e^{-j\omega t}$ ein reelles monochromatisches Signal der Frequenz ω, Amplitude $2\frac{|F(\omega)|}{2\pi}$ und Phase $\angle F(\omega)$







Das Spektrum ist ein Maß für die Schnelligkeit der Signaländerung



stellen die schnelle Änderung dar

= Beispiele der Spektren: Audio, Video, Mobilfunk

Allgemeine Diskussion.

1.4: Allgemeine Eigenschaften der Fourier-Transformation

Hintransformation

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$$

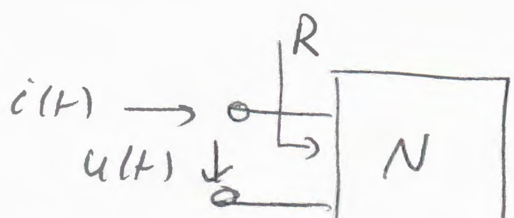
Rücktransformation

Nicht alle Signale $f(t)$ Fourier-transformierbar,

Nur $f(t)$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt =$ endlich

sind Fourier-transformierbar

In der Tat, stellt $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt$ die Signal-Energie dar



$$p(t) = u(t)\, i(t) = R\, i^2(t) = \frac{u^2(t)}{R}$$ = momentane Leistung

Gesamte Energie $= \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\,dt \sim \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt$

Dies bedeutet auch, daß $\lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0$

7.4.1: Ableitung und Integration im Zeitbereich

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dt}\, e^{-j\omega t} = \left| f(t)\, e^{-j\omega t} \right|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Da $f(\pm\infty) = 0 \implies \boxed{\mathcal{F}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = j\omega\, \mathcal{F}\{f(t)\}}$

$$\mathcal{F}\Big\{\underbrace{\int_{-\infty}^{t} f(t')\,dt'}_{g(t)}\Big\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{t} f(t')\,dt'\right] e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{d}{dt}\left[e^{-j\omega t}\right]}{-j\omega} \left[\int_{-\infty}^{t} f(t')\,dt'\right] dt$$

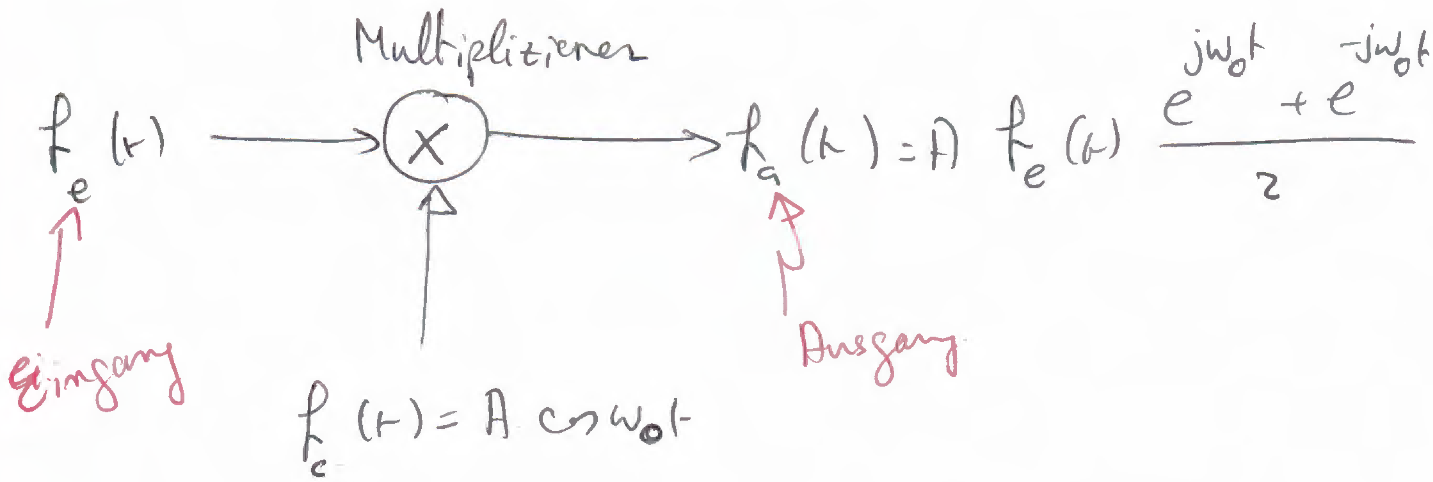
$$= \frac{-1}{j\omega}\left\{ \left| e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{t} f(t')\,dt' \right|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\, \underbrace{\frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t')\,dt'\right]}_{= f(t)} dt \right.$$

Da $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 0$, um Fourier-transformierbar zu sein, dann $\lim\limits_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{t} f(t')\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\,dt' = 0$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(t')\,dt'\right\} = \frac{1}{j\omega}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\, f(t)\,dt = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$= \frac{1}{j\omega}\,\mathcal{F}\{f(t)\}$$

1-4.2: Modulationseigenschaft; Frequenzumsetzung

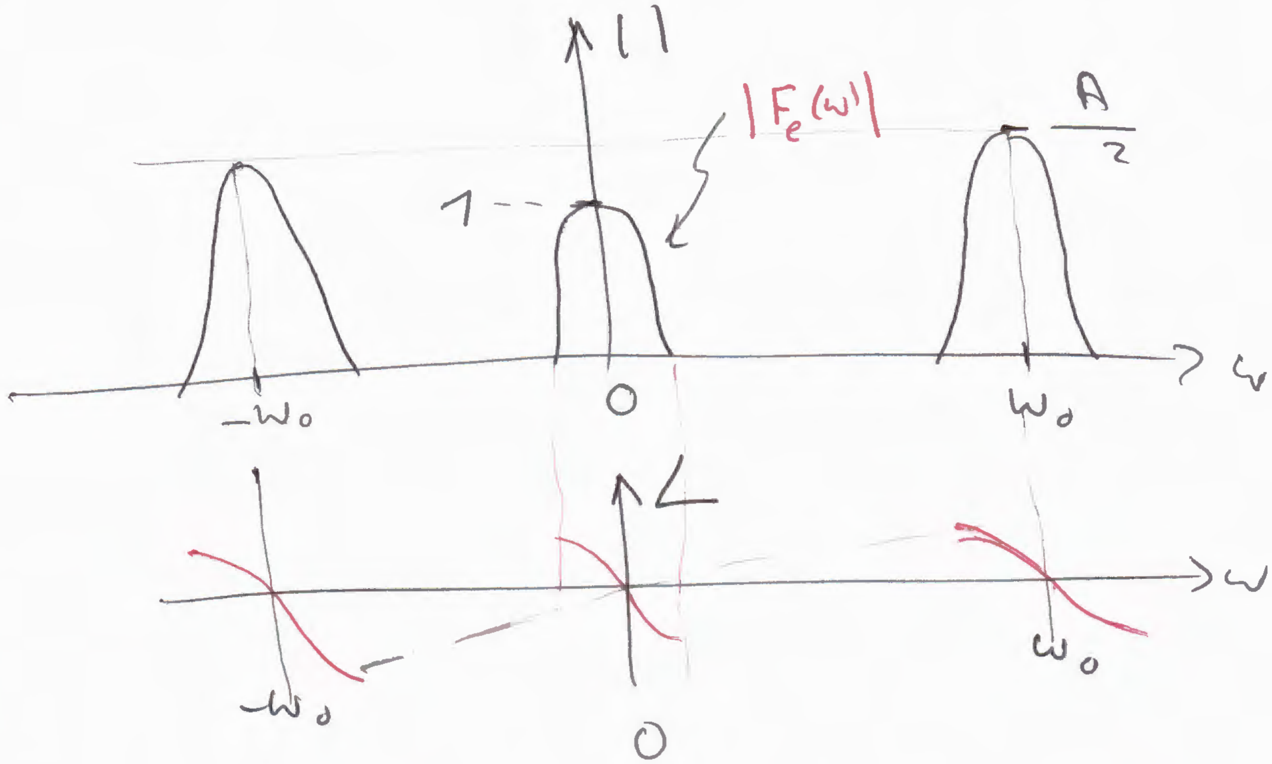


$$\mathcal{F}\left\{f(t)\, e^{\pm j\omega_0 t}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t)\, e^{\pm j\omega_0 t}\right] e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j(\omega \mp \omega_0)t}\,dt$$

$$= F(\omega \mp \omega_0)$$

$$\Longrightarrow F_a(\omega) = \frac{A}{2}\left[F_e(\omega-\omega_0) + F_e(\omega+\omega_0)\right]$$



Vorteile der Modulation

- Effiziente Ausnutzung der Kanäle
- Benutzung der Funkkanäle.