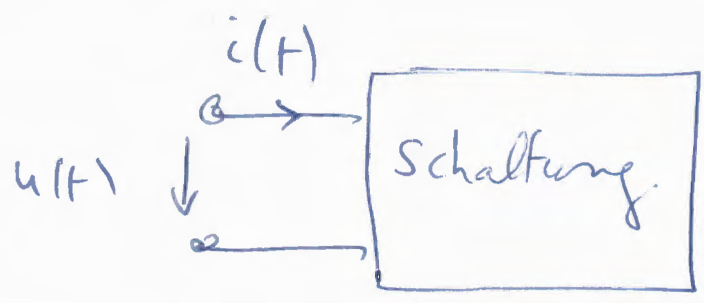
Vorlesung am 19.10.05

2.V

KT-I
05/06

Kapitel 1: Mathematische Darstellung der Signale

Signale (als Informationsträger) sind zeit-abhängige physikalische Vorgänge. Sie können als zeitabhängige Funktion $s(t)$ dargestellt werden. Beispiele: Spannung, Strom, Luftdruck, Temperatur, ... etc.



Schreibweise: Kleine Buchstaben werden für diese (zeitabhängige) Darstellung benutzt

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega\to 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_T(\omega = m\Delta\omega)\, e^{j\overbrace{m\Delta\omega}^{\omega} t}\, \Delta\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\overbrace{\lim_{T\to\infty} F_T(\omega)}^{F(\omega)}\Big] e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\lim_{T\to\infty} F_T(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Man erhält dann das Paar

$$\boxed{\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \end{aligned}}$$

Dieses Paar nennt sich Fourier-Transformations-Paar

Da $F_{-m} = F_m^* \implies F_T(\omega = -m\Delta\omega) = F_T^*(\omega = m\Delta\omega)$

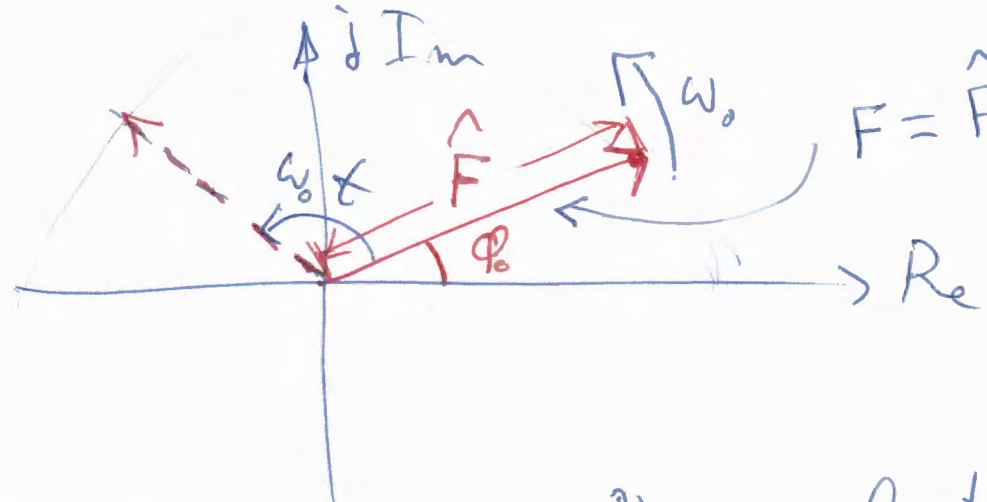
$$\implies F(-\omega) = F^*(\omega)$$

$f_0 = \frac{w_0}{2\pi}$: Frequenz [Hertz Hz]

φ_0 = Phasenwinkel (phase) [Ein Maß für die zeitliche Lage der Kurve]

- Phasoren Darstellung.

Ein Phasor ist eine rotierende komplexe Zahl



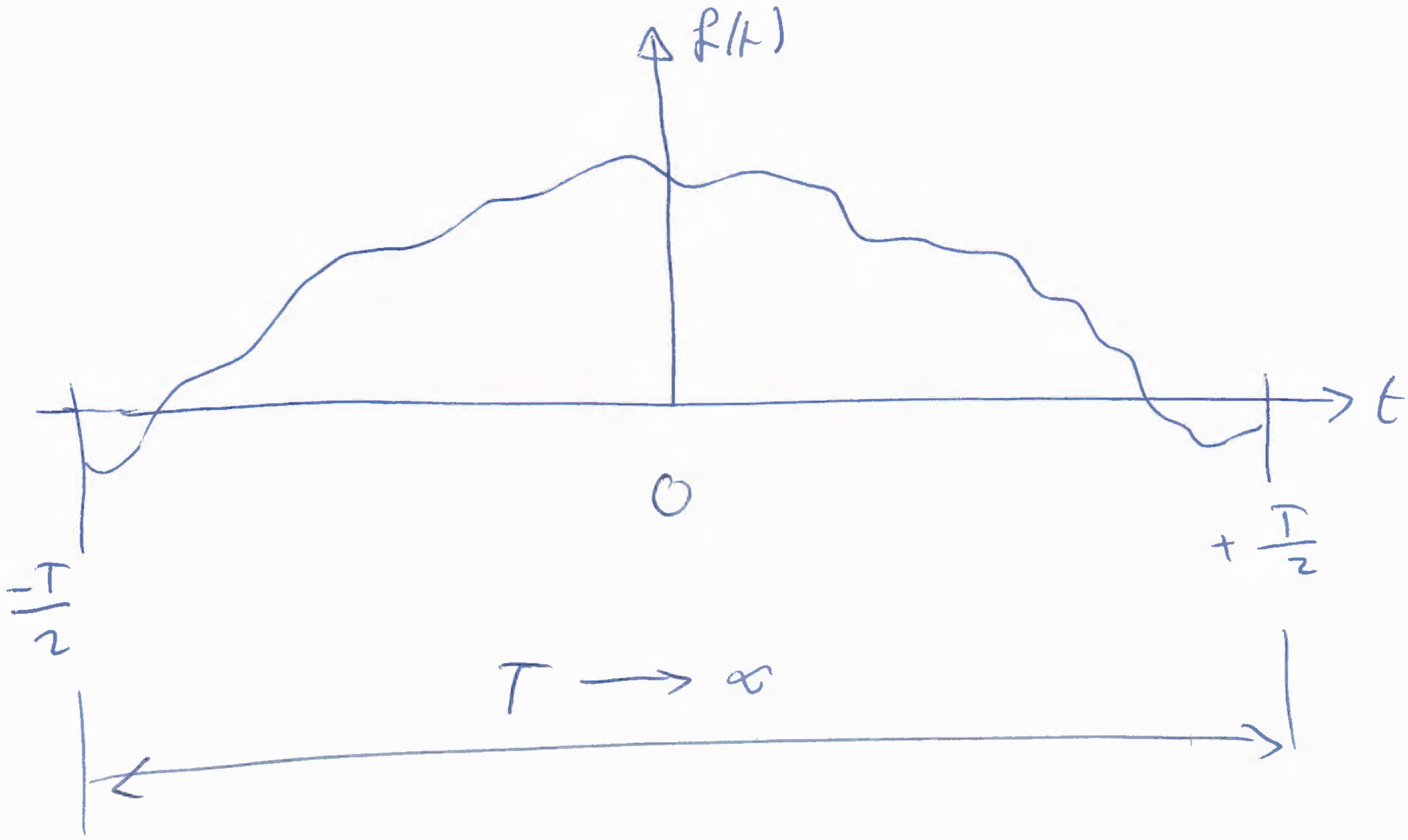
$F = \hat{F} e^{j\varphi_0}$

Die komplexe Darstellung eines Phasors lautet:

$$\text{Phasor} = \hat{F} e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega_0 t}$$ – Rotationsfaktor

F = Lage des Phasors zum Zeitpunkt $t = 0$

$f(t) = \hat{F} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ kann in Abhängigkeit von Phasoren dargestellt werden:



$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \longrightarrow \Delta\omega \longrightarrow 0$, wenn $T \longrightarrow \infty$

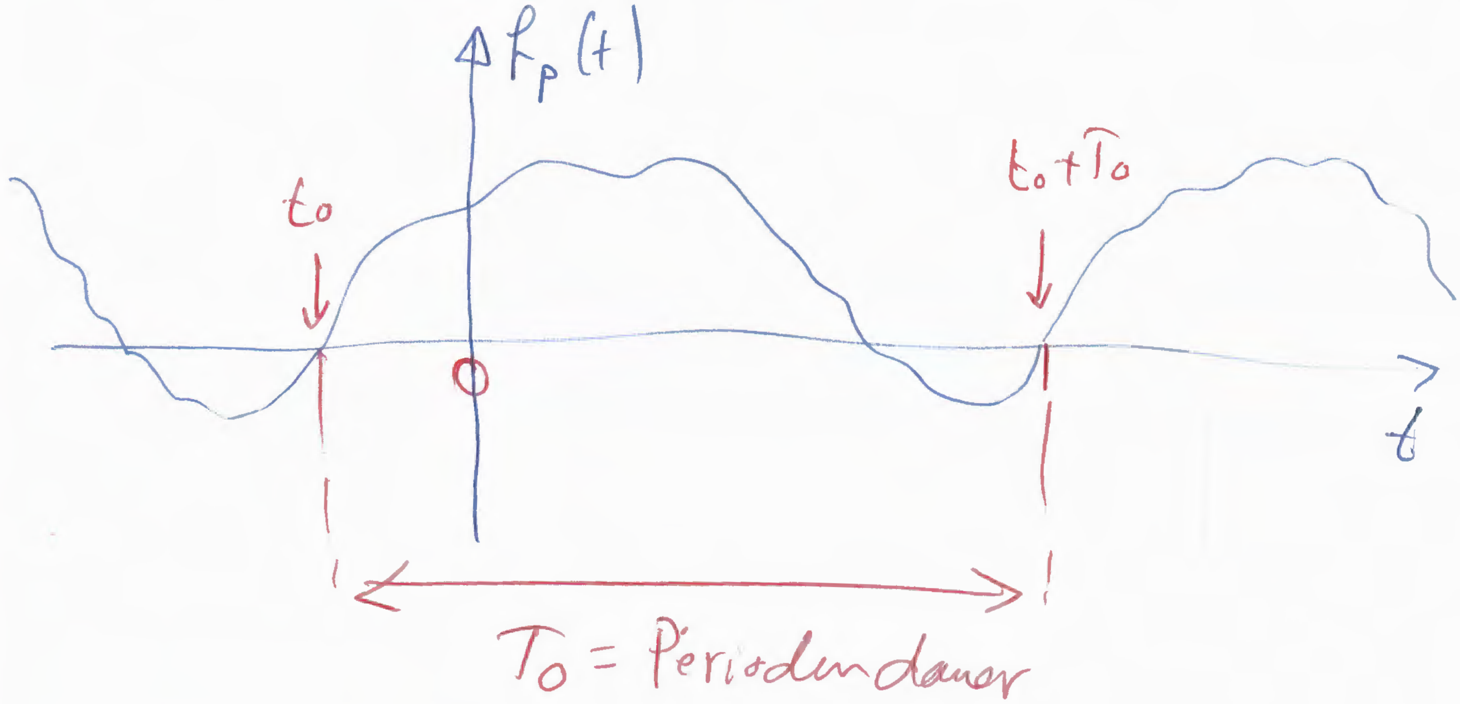
Das Spektrum wird dichter und dichter und man erhält bei $T \longrightarrow \infty$ eine kontinuierliche Verteilung für das Amplituden- und Phasen-spektra

Lassen wir die periodische Funktion $f_T(t)$ wie nachstehend definieren:

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & |t| \leq \frac{T}{2} \\ f(t-mT) & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$m = \mathrm{Int}\left(\frac{2t}{T}\right)$

1.2: Periodische Signale und Fourier-Reihe



Grundkreisfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, Grundfrequenz $f_0 = \frac{1}{T_0}$

1.2.1: Die Fourier-Reihe

$$f_p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$$

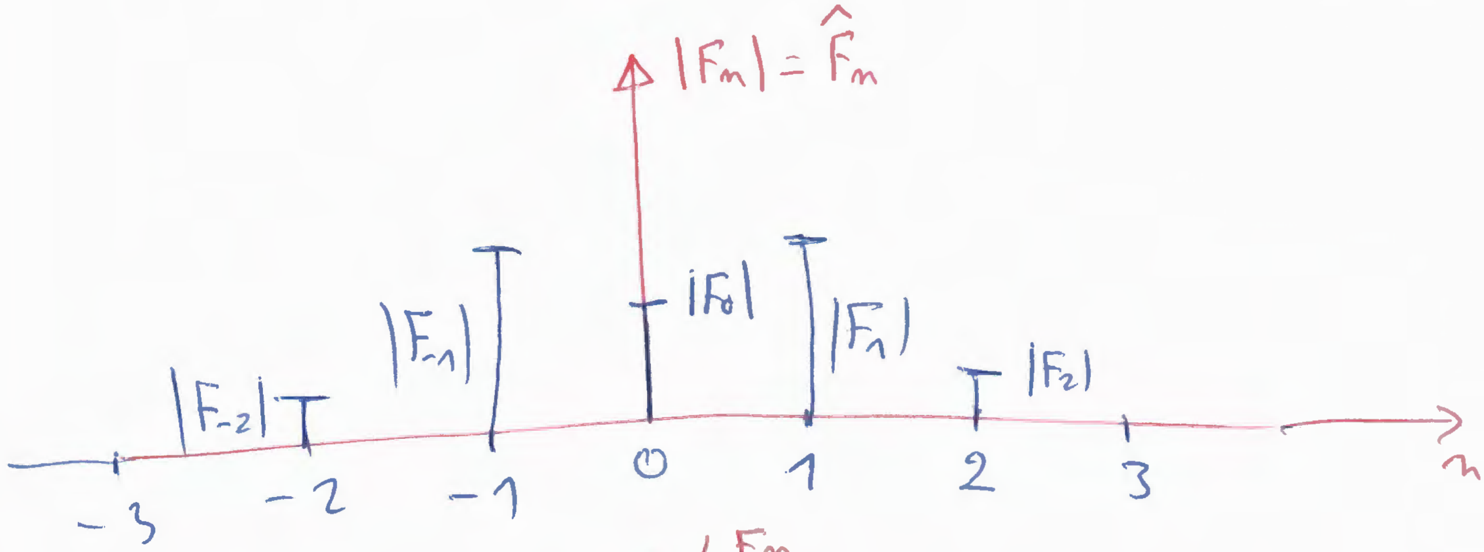
$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f_p(t)\, dt, \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f_p(t) \cos n\omega_0 t\, dt$$

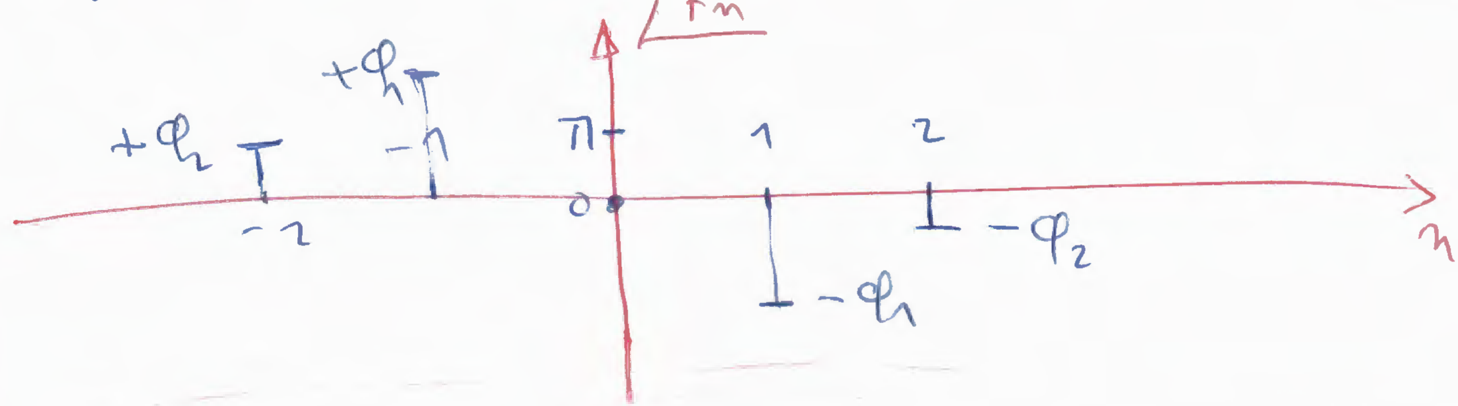
$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f_p(t) \sin n\omega_0 t\, dt$$

$$\boxed{f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \, e^{jn\omega_0 t} \qquad F_n = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} f_p(t)\, e^{-jn\omega_0 t}}$$

1.2.2 : Das Amplituden- und Phasen-Spektrum

Diese sind graphische Darstellungen des Betrags und der Phase von F_n :





F_m

$$f_p(t) = F_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \hat{F}_m e^{-j\varphi_m} e^{jm\omega_0 t} + \hat{F}_m e^{j\varphi_m} \cdot e^{-jm\omega_0 t} \right\}$$

F_m^*

Mit $F_{-m} = F_m^*$ für $m > 0$, erhalten wir

$$f_p(t) = \sum_{m=1}^{\infty} F_{-m} e^{j(-m)\omega_0 t} + F_0 + \sum_{m=1}^{\infty} F_m e^{jm\omega_0 t}$$

ersetzen Sie $-m$ durch m $\Rightarrow$

$$f_p(t) = \sum_{m=-\infty}^{-1} F_m e^{jm\omega_0 t} + F_0 + \sum_{m=1}^{\infty} F_m e^{jm\omega_0 t}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{jm\omega_0 t}$$

$$f_p(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ \overbrace{\hat{F}_n e^{-j\varphi_n}}^{F_n} e^{jn\omega_0 t} + \underbrace{\hat{F}_n e^{j\varphi_n}}_{F_n^*} \cdot e^{-jn\omega_0 t} \Big\}$$

Mit $F_{-n} = F_n^*$ für $n > 0$, erhalten wir

$$f_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{-n} e^{j(-n)\omega_0 t} + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

ersetzen Sie $-n$ durch n $\Rightarrow$

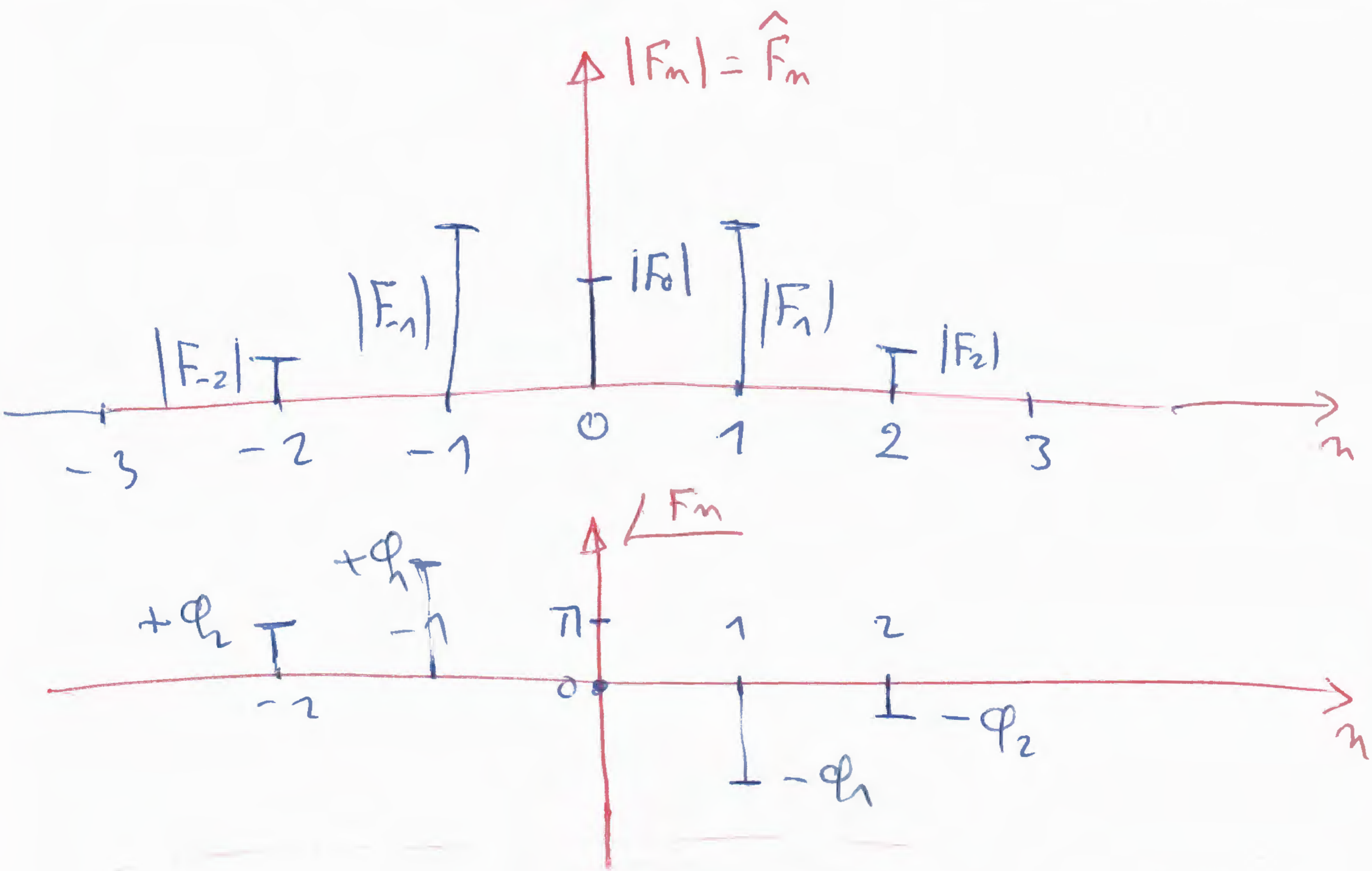
$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} F_n e^{jn\omega_0 t} + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

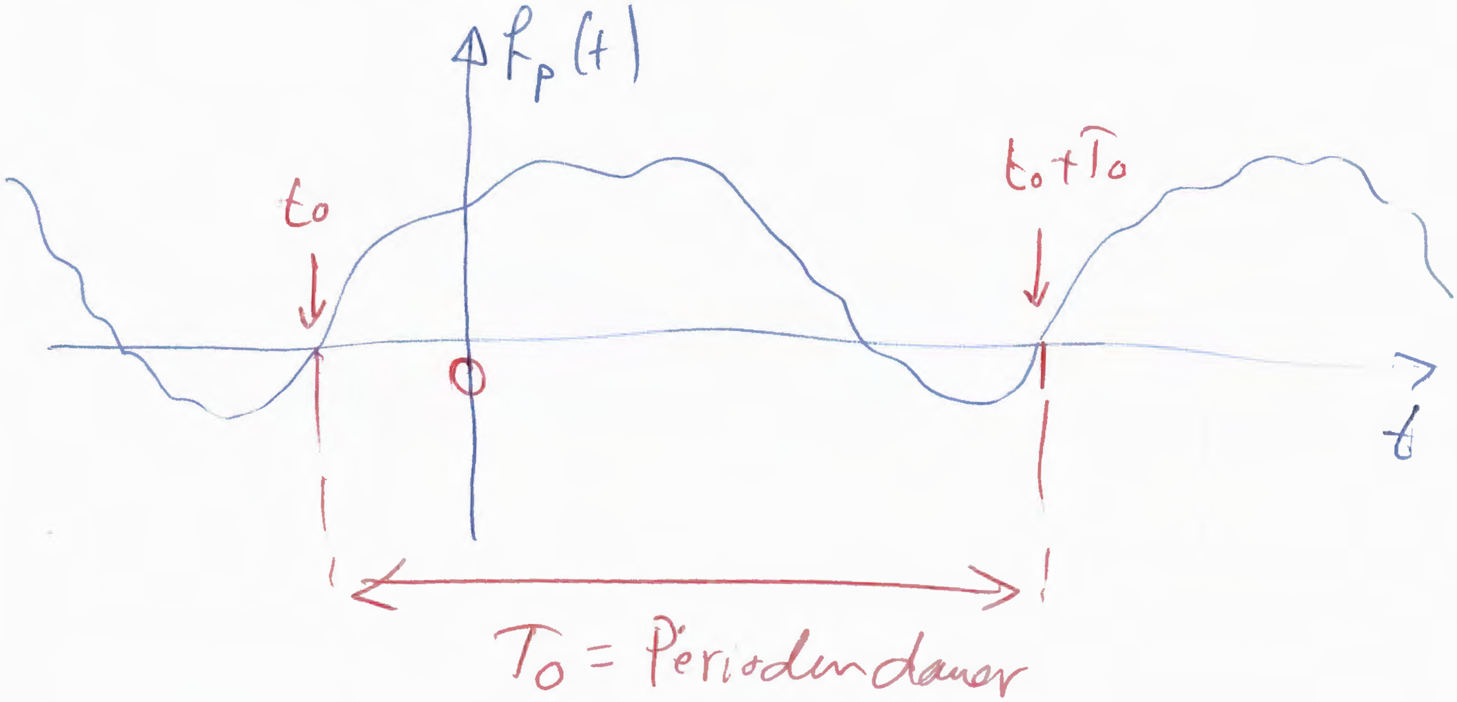
$$\boxed{\begin{aligned} f_p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \, e^{jn\omega_0 t} \\ F_n &= \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f_p(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \end{aligned}}$$

1.2.2: Das Amplituden- und Phasen-Spektrum

Diese sind graphische Darstellungen des Betrags und der Phase von F_n:



1.2: Periodische Signale und Fourier-Reihe



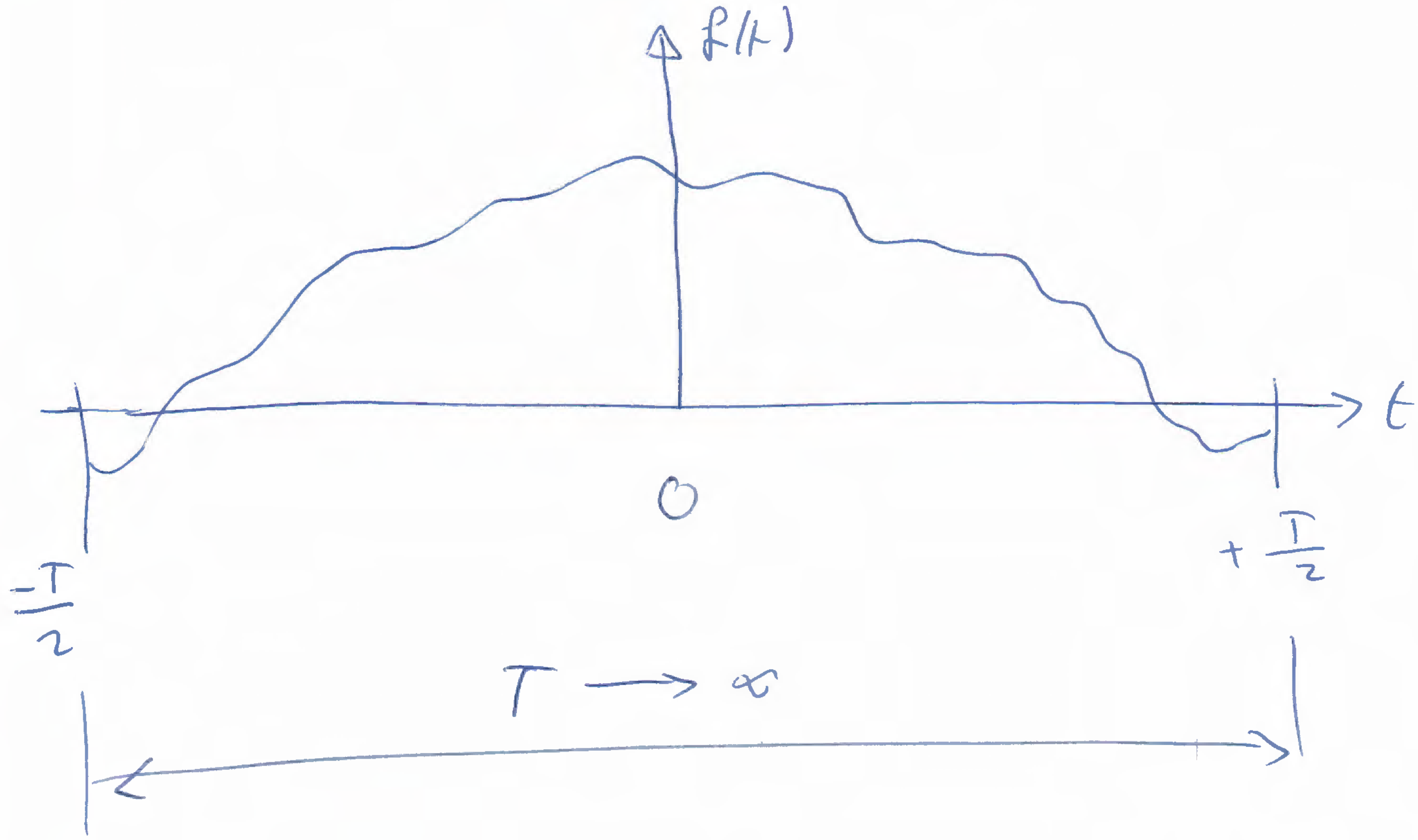
Grundkreisfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, Grundfrequenz $f_0 = \frac{1}{T_0}$

1.2.1: Die Fourier-Reihe

$$f_p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} f_p(t)\,dt\,, \quad a_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} f_p(t)\cos n\omega_0 t\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} f_p(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \longrightarrow \Delta\omega \longrightarrow 0 \quad \text{, wenn } T \longrightarrow \infty$$

Das Spektrum wird dichter und dichter und man erhält bei $T \longrightarrow \infty$ eine kontinuierliche Verteilung für das Amplituden- und Phasen-spektra

Lassen wir die periodische Funktion $f_T(t)$ wie nachstehend definieren:

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & |t| \leq \frac{T}{2} \\ f(t - mT) & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

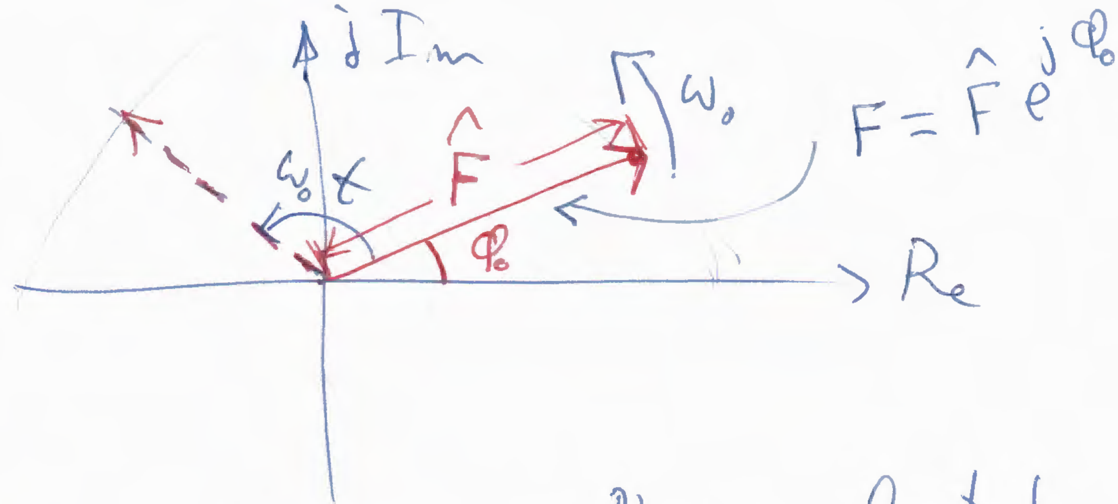
$m = \mathrm{Int}\left(\frac{2t}{T}\right)$

$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$: Frequenz [Hertz Hz]

φ_0 = Phasenwinkel (phase) [Ein Maß für die zeitliche Lage der Kurve]

- Phasoren Darstellung.

Ein Phasor ist eine rotierende komplexe Zahl



Die komplexe Darstellung eines Phasors lautet:

$$\text{Phasor} = \hat{F} e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega_0 t}$$ – Rotationsfaktor

F = Lage des Phasors zum Zeitpunkt $t = 0$

$f(t) = \hat{F} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ kann in Abhängigkeit von Phasoren dargestellt werden:

$$f(t) = \lim_{T \to \infty} f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_T(\omega = n\Delta\omega)\, e^{j\overset{\omega}{n\Delta\omega} t}\, \Delta\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\overbrace{\lim_{T \to \infty} F_T(\omega)}^{F(\omega)} \Big] e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\lim_{T \to \infty} F_T(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Man erhält dann das Paar

$$\boxed{\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \end{aligned}}$$

Dieses Paar nennt sich Fourier-Transformations-Paar

Da $F_{-n} = F_n^* \Longrightarrow F_T(\omega = -n\Delta\omega) = F_T^*(\omega = n\Delta\omega)$

$$\Longrightarrow \quad F(-\omega) = F^*(\omega)$$

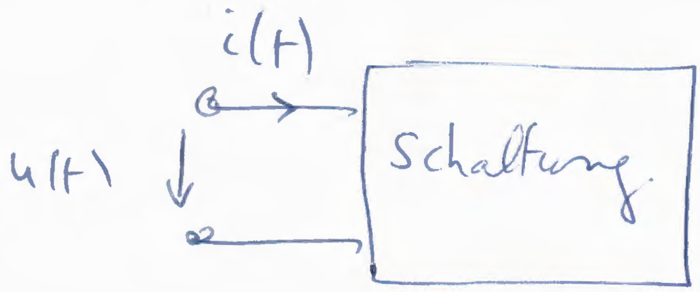
Vorlesung am 19.10.05

2. V

KT-I
05/06

Kapitel 1: Mathematische Darstellung der Signale

Signale (als Informationsträger) sind zeit-abhangige physikalische Vorgänge. Sie können als zeitabhangige Funktion $s(t)$ dargestellt werden. Beispiele: Spannung, Strom, Luftdruck, Temperatur, ... etc.



Schreibweise: Kleine Buchstaben werden für diese (zeitabhängige) Darstellung benutzt.