Vorlesung am 09.06.06

8. V

IC
SS-06

Kapitel 2: Die Codierungstheorie

Die Codierungstheorie beschäftigt sich mit der Kanalcodierung

2.1: Fehlererkennung und Fehlerkorrektur

Kanalcodierung

Fehlererkennung

$\Downarrow$

Automatic Repeat Request (ARQ)

Fehler-Erkennung und Korrektur

$\Downarrow$

Forward Error Correction (FEC)

Im einem ARQ-System quittiert der Empfänger die Richtigkeit des Empfangs. Falls der Empfänger einen Fehler erkannt hat, fordert er dem Sender auf, den fehlerhaften Code noch einmal zu senden. Dies geht weiter so, bis der Empfänger keinen Fehler erkannt (oder nach bestimmter Zahl von Wiederholungen wird dieser Vorgang beendet).

Vorteil: Fehler-Erkennung ist einfacher (im Hinblick auf Speicherbedarf und CPU-Zeit) als die Fehler-Erkennung und Korrektur.

Nachteil: Ein Rückwärtskanal (in dem der Empfänger sendet und der Sender empfängt) ist notwendig für das Quittieren

ARQ geht nicht für "Broadcasting" (Radio und TV)

geht aber für WLAN, Mobilfunk und Computernetze.

Die effektive Datenrate ist kleiner als die nominale, wegen der Wiederholung (z.B. in Ring-Netze mit Koaxialem Ring vermindert die Fehlanpassung des Rings die tatsächliche Datenrate. Dies ist der Hauptgrund für RJ-45 (twisted pair-Kabel).

In einem FEC-System wird der erkannte Fehler automatisch korrigiert.

Vorteil: Kein Rückwärtskanal wird benötigt. Das Verfahren eignet sich für TV-Übertragung und Radio-Übertragung

Nachteil: Die Fehlerkorrektur benötigt CPU-Zeit und Speicherbedarf

Die effektive Datenrate ist hier ebenfalls kleiner als die nominale, da Kontrollbits zu den Informationsbits zugefügt werden mussen, um die Erkennung und Korrekturen des Fehlers zu ermöglichen.

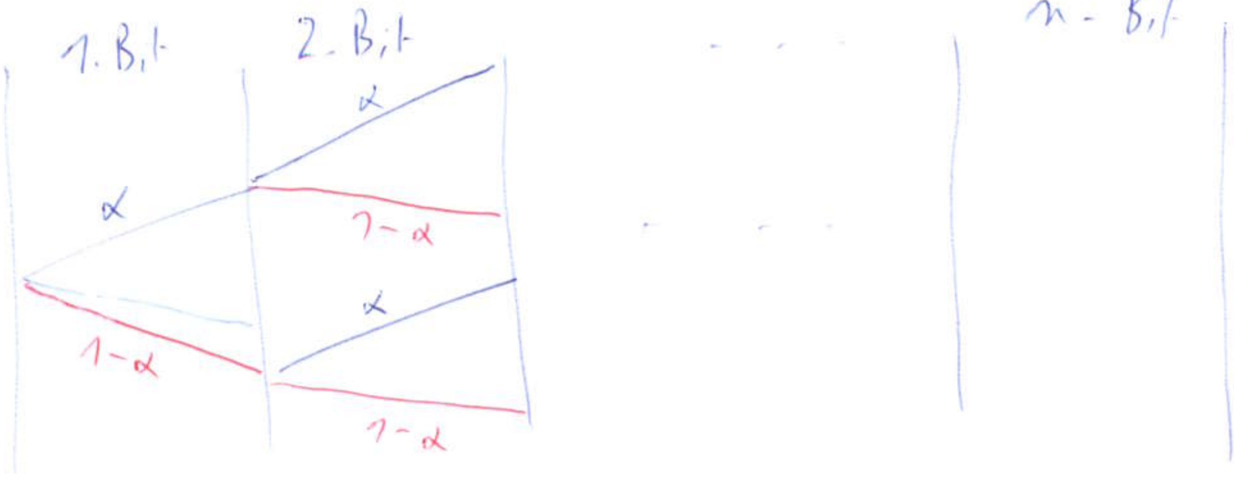
2.1.1: Die Fehlerstatistik

- Definitionen

1.) Die einfache Bitfehlerrate P_e ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Bit fehlerhaft empfangen wird.

$$\left[P_e = \lim_{N \to \infty} \frac{\text{Anzahl der Fehlerhaften Bits in N-Bits}}{N} = \alpha \right]$$

2-) $P(i,n)$ = Wahrscheinlichkeit, daß i Bits in einem n-Bit-Block fehlerhaft sind

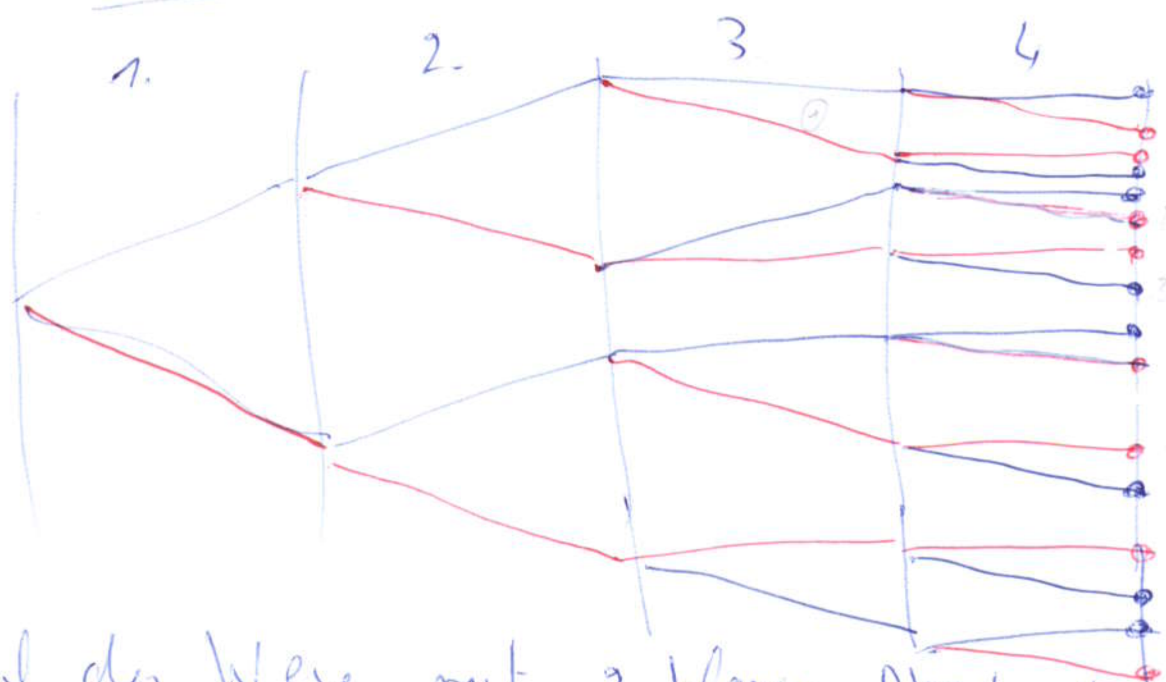


Fehlerhaft   Richtig

$$P(i,n) = \binom{n}{i} \alpha^{i} (1-\alpha)^{n-i} \; ; \; \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

$$0! = 1! = 1$$

Beispiel: $n = 4$, $i = 2$



Anzahl der Wege mit 2 blauen Abschnitten := 6

$$P(2,4) = \binom{4}{2} \alpha^2 (1-\alpha)^2 \quad ; \quad \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{(2)^2} = 6$$

3-) $P(i+1,n) \ll P(i,n)$ wenn $\alpha \ll \frac{1}{2}$, $n \gg 1$

Bemerkung: $\hat{\alpha} = \frac{1}{2}$, da für $\alpha > \frac{1}{2}$ ~~man~~ Kann die Rollen von α und $(1-\alpha)$ vertauschen kann.

Beweis

$$P(i+1,n) = \frac{n!}{(i+1)!\,(n-i-1)!} (\alpha)^{(i+1)} (1-\alpha)^{(n-i-1)}$$

$$= \frac{n!}{(i+1)(i!)\,\frac{(n-i)!}{(n-i)}} \alpha \cdot \alpha^i \, \frac{(1-\alpha)^{(n-i)}}{(1-\alpha)}$$

$$= \underbrace{\frac{n!}{i!\,(n-i)!} \alpha^i (1-\alpha)^{(n-i)}}_{P(i,n)} \, \frac{\alpha \,(n-i)}{(1-\alpha)\,(i+1)}$$

$$\boxed{\frac{P(i+1,n)}{P(i,n)} = \frac{\alpha\,(n-i)}{(1-\alpha)(i+1)}}$$

Beispiel $n = 10$ $\alpha = 10^{-3}$ $i = 1$

$$\Longrightarrow \frac{P(2,n)}{P(1,n)} = \frac{(n-1)\,\alpha}{2\,(1-\alpha)} = \frac{9 \times 10^{-3}}{2 \cdot (0.999)} \approx 0{,}45 \times 10^{-2}$$

$$= 0{,}0045$$

Dies ist der Grund dafür, daß die Korrektur von Einbitfehler in der Computer-Kommunikation vollständig reicht.

2.1.2: Codewiederholung und Paritätskontrolle

In einem Codewiederholungsverfahren wird die "0" und die "1" als z.B. "000" bzw. "111" übertragen

Nachrichtenbits	Codewort
0	000
1	111

– Fehlererkennung.

Alle Kombinationen (Codewörter) bis auf (000) und (111) weisen Fehler auf. $\Longrightarrow$ Einbit- und Zweibit-fehler werden erkannt. Nur Dreibitfehler wird nicht erkannt. Der letzte ist ein "Restbitfehler". Dafür definieren wir den "Wortfehler" "Word error"

$$P_{We} = P(3,3) = \binom{3}{3} \alpha^3 (1-\alpha)^0 = \alpha^3$$

Mit $\alpha = 10^{-3}$ $\qquad \alpha^3 = P_{We} = 10^{-9}$

Preis dafür : Die effektive Datenrate $= \frac{1}{3}$ tatsächliche Datenrate.

– Fehlerkorrektur

Korrigiert wird nach dem Mehrheitsprinzip :

$000 \longrightarrow 0$
$001 \longrightarrow 0$
$010 \longrightarrow 0$
$011 \longrightarrow 1$
$100 \longrightarrow 0$
$101 \longrightarrow 1$
$110 \longrightarrow 1$
$111 \longrightarrow 1$

Falls ein Zweibitfehler eintritt, dann ist die Korrektur fehlerhaft

$$P_{we} = P(2,3) + P(3,3) = \binom{3}{2} \alpha^2 \cdot (1-\alpha) + \alpha^3$$

$$= 3(\alpha^2 - \alpha^3) + \alpha^3 = 3\alpha^2 - 2\alpha^3$$

$$\alpha = 0{,}001 \Longrightarrow P_{we} \simeq 3\alpha^2 = 3 \times 10^{-6}$$

In diesem einfachen Fall stellt jedes Wort ein einziges Nachrichtenbits dar, deshalb ist $P_{we} = P_{re}$

Restfehlerrate

Sonst $P_{re} = \dfrac{P_{we}}{\text{Anzahl der Nachrichtenbits im Codewort}}$

In der Paritätskontrolle bildet man n-Bits-Blöcke mit $(n-1)$ Nachrichtenbits und einem Bit (als Kontrollbit). Das Kontrollbit wird so gewählt, daß die Anzahl der Einsen gerade ist.

$\Longrightarrow$ Einbit-, Dreibit-, ... Fehler werden erkannt, während Zweibit-, Vierbit-, ... Fehler nicht erkannt bleiben.

$$P_{we} = P(2,n) + P(4,n) + \ldots \simeq P(2,n) = \binom{n}{2}\alpha^2 \cdot (1-\alpha)^{n-2}$$

$$P_{we} \simeq \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2 \cdot \cancel{(n-2)!}}\alpha^2 (1-\alpha)^{n-2} \simeq \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$$

$$P_{re} = \frac{P_{we}}{(n-1)} = \frac{n}{2}\alpha^2$$

Anzahl der Nachrichtenbits im n-Bit-Block.

Ohne Paritätskontrolle beträgt der Wortfehler

$$P_{nwe} = 1 - P(0, n-1)$$

nicht codiert

Ohne Codierung besteht das Codewort aus nur $(n-1)$ Bits

$$P_{nwe} = 1 - \underbrace{\binom{n-1}{0}}_{1} \underbrace{\alpha^0}_{1} (1-\alpha)^{n-1} = 1 - (1-\alpha)^{n-1}$$

$$\alpha \ll 1 \Longrightarrow (1-\alpha)^{n-1} \simeq 1 - (n-1)\alpha$$

$$P_{nwe} = 1 - [1 - (n-1)\alpha] = (n-1)\alpha$$

$$P_{re} = \frac{P_{nwe}}{(n-1)} = \alpha$$ (wie es sein muß)

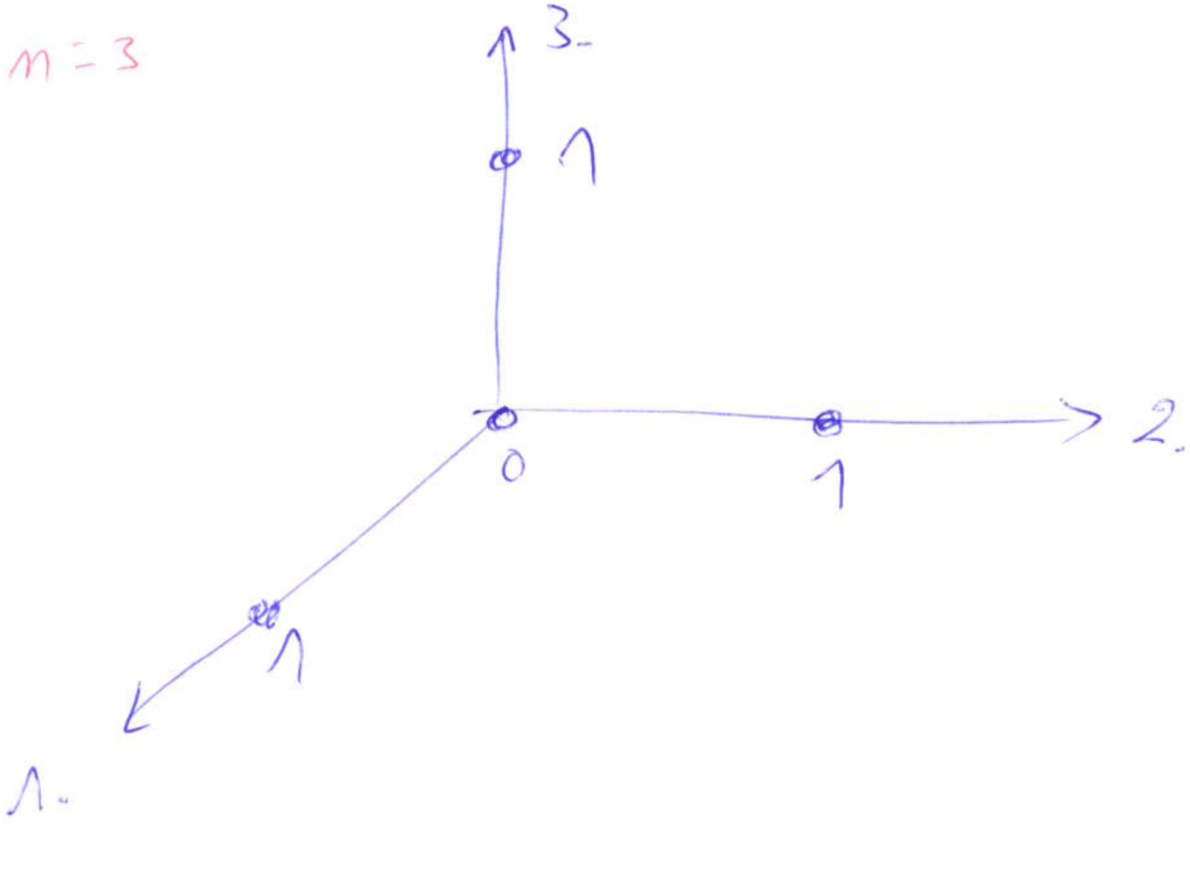
$$\frac{P_{we}}{P_{nwe}} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2}{(n-1)\alpha} = \frac{n}{2}\alpha$$

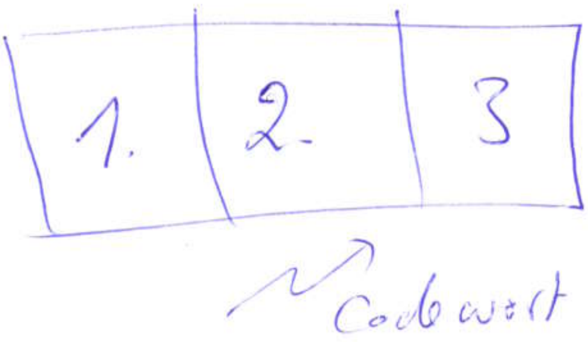
$n = 8$, $\alpha = 0{,}001 \Longrightarrow \frac{P_{we}}{P_{nwe}} = 0{,}004$

2.2: Der Hammingraum

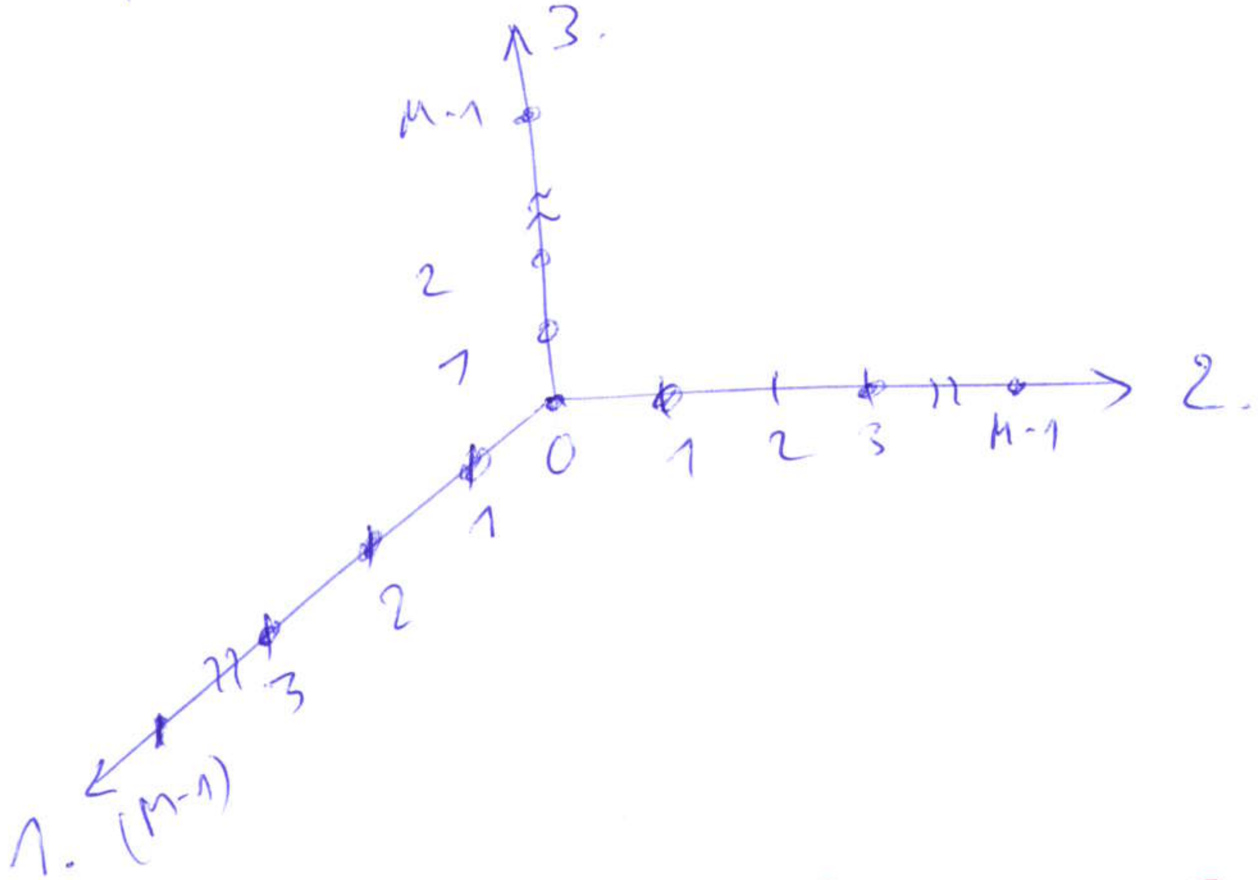
Die Stellen einer Sequenz ~~aus m Bits~~ (m-Bit-Block) oder (Codewort) werden ~~auf~~ die Achsen eines n-Dimensionalen Raums abgebildet.

Beispiel $n = 3$





Für eine M-äre Codierung gibt's entlang jeder Achse M verschiedene Werte



Hier handelt es sich um Sequenzen aus ~~M~~ n Symbolen (n-Symbol-Block)

Jeder Knoten im n-dimensionalen Raum stellt eine mögliche Kombination von Bits

Beispiel $n = 3$