Vorlesung am 26.05.06

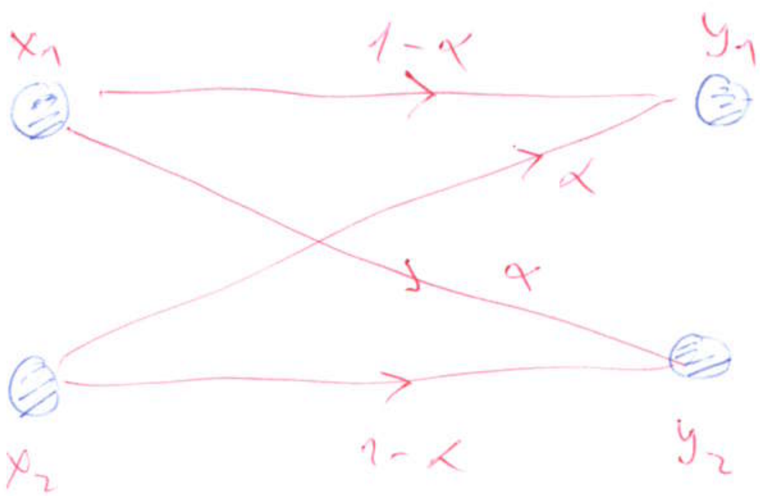
7. V

IC
SS-06

1.9.3: Der symmetrische Binärkanal

Hier gilt: $\underbrace{M = N = 2}_{\text{binär}}$; $\underbrace{p(y_2|x_1) = p(y_1|x_2)}_{\text{symmetrisch}}$

$X = \{x_1, x_2\}$



$Y = \{y_1, y_2\}$

$P(y_1|x_1) = 1-\alpha$ $\qquad$ $P(y_2|x_2) = 1-\alpha$

$P(y_1|x_2) = \alpha$ $\qquad$ $P(y_2|x_1) = \alpha$

Angenommen, daß $P(x_1) = p \implies P(x_2) = 1-p$

und $P(y_1) = q \implies P(y_2) = 1-q$

$H(X) = \Omega(p)$, $H(Y) = \Omega(q)$

Da $q = p(y_1) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1)$

$$= p(y_1|x_1) \cdot p(x_1) + p(y_1|x_2) \cdot p(x_2)$$

$$= (1-\alpha) \cdot p + \alpha \cdot (1-p)$$

$$= p - 2\alpha p + \alpha$$

$$\boxed{q = p + \alpha - 2\alpha \cdot p}$$

* Fehlerwahrscheinlichkeit P_e

$$P_e = P(x_1, y_2) + P(x_2, y_1) = P(y_2|x_1) \cdot P(x_1) + P(y_1|x_2) \cdot P(x_2)$$

$$= \alpha \cdot p + \alpha \cdot (1-p) = \alpha$$

$$P_e = \alpha$$

Sonderfälle: 1-) $\alpha = 0 \Longrightarrow q = p$, $H(X) = H(Y) = \Omega(p)$

2-) $\alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow q = p + \frac{1}{2} - p = \frac{1}{2} \Longrightarrow H(X) = \Omega(p)$, $H(Y) = \Omega(q) = \frac{1}{2}$

Um die bedingten Entropien sowie die Transinformation zu berechnen, brauchen wir folgendes:

	$X \backslash Y$	y_1	y_2
p	x_1	$1-\alpha$	α
$1-p$	x_2	α	$1-\alpha$
		q	$1-q$

$\longleftarrow P(y_j)$

$P(x_i)$ $\quad P(y_j \mid x_i)$

$X \backslash Y$	y_1	y_2
x_1	$p(1-\alpha)$	αp
x_2	$\alpha(1-p)$	$(1-\alpha)(1-p)$

$\longleftarrow P(y_j$

$P(x_i, y_j) = P(y_j \mid x_i) \cdot P(x_i)$

$$H(Y \mid X) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} P(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{P(y_j \mid x_i)}$$

$$= p(1-\alpha) \log_2 \frac{1}{1-\alpha} + \alpha p \log_2 \frac{1}{\alpha}$$

$$+ \alpha(1-p) \log_2 \frac{1}{\alpha} + (1-\alpha)(1-p) \log_2 \frac{1}{1-\alpha}$$

$$= (1-\alpha) \log_2 \frac{1}{1-\alpha} + \alpha \log_2 \frac{1}{\alpha} = \Omega(\alpha)$$

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y \mid X) = \Omega(q) - \Omega(\alpha)$$

Sonderfälle : $\alpha = 0 \Rightarrow \Omega(\alpha) = 0\,,\; q = p \Rightarrow$

$$I(X,Y) = \Omega(p) = H(X)$$

$\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \Omega(\alpha) = 1\,,\; q = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$I(X,Y) = \Omega(\tfrac{1}{2}) - 1 = 0$$

1.9.4 : Die Kanalkapazität

Für vorgegebenes Rauschverhalten des Kanals, stellt sich die Frage, welche Verteilung $P(x_i)$ maximiert $I(X,Y)$. Das Maximum von $I(X,Y)$ ist definitionsgemäß die Kanalkapazität C_s

$$C_s\,[\text{Bit/Symb}] = \max_{P(x_i)} \left\{ I(X,Y) \right\}$$

Beispiel : Der symmetrische Binärkanal

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X) = \Omega(q) - \Omega(\alpha)$$

$$= \Omega(\alpha + p - 2\alpha p) - \Omega(\alpha)$$

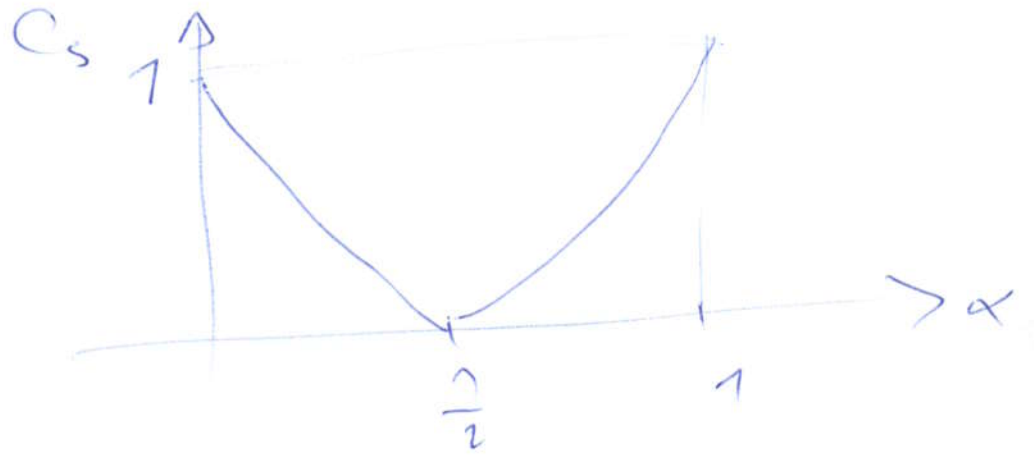
Vorgegeben

$$\hat{I}(X,Y) = \hat{\Omega}(\alpha + p - 2\alpha p) - \Omega(\alpha)$$

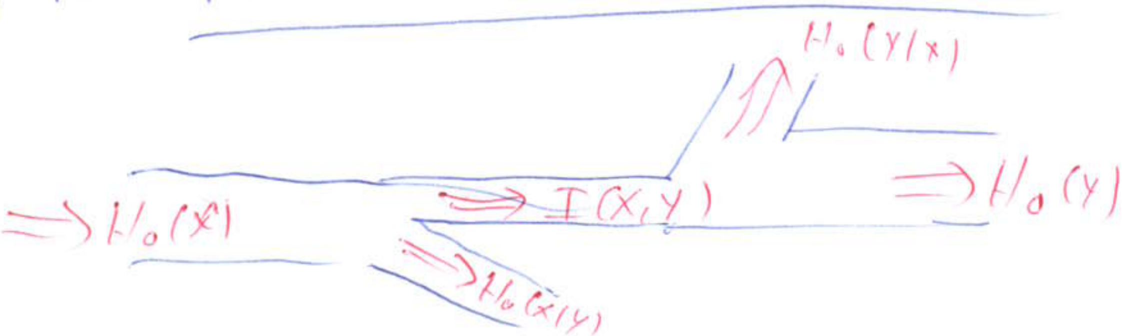
$$= 1 - \Omega(\alpha) \; ; \text{ bei } \alpha + p - 2\alpha p = \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow p(1-2\alpha) = \frac{1-2\alpha}{2} \Rightarrow \text{bei } p = \frac{1}{2}$$

$$C_s = 1 - \Omega(\alpha)$$



1.10 : Kontinuierliche Kanäle



$$H_0(X) = H(X) + \log_2 \frac{1}{\Delta x} \qquad H_0(Y) = H(Y) + \log_2 \frac{1}{\Delta y}$$

1.10. Die bedingten Entropien

Allgemein gilt: $p_{XY}(x,y)\,\Delta x \cdot \Delta y \simeq P\{x \le X < x+\Delta x;\ y \le Y < y+\Delta y\}$

$$p_X(x)\,\Delta x \simeq P(x \le X < x+\Delta x)$$

$$p_Y(y)\,\Delta y \simeq P(y \le Y < y+\Delta y)$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden wie folgt definiert:

$$P\{x \le X < x+\Delta x \,|\, Y = y\} \simeq p_X(x|y)\,\Delta x$$

WV von X

$$P\{y \le Y < y+\Delta y \,|\, X = x\} \simeq p_Y(y|x)\,\Delta y$$

WV von y

Nun $$P\{x \leq X < x+\Delta x , y \leq Y < y+\Delta y\} =$$

$$P\{y \leq Y < y+\Delta y \mid X = x\} \cdot P\{x \leq X < x+\Delta x\} =$$

$$P\{x \leq X < x+\Delta x \mid Y = y\} \cdot P\{y \leq Y < y+\Delta y\}$$

$$\Downarrow$$

$$P_{XY}(x,y)\, \cancel{\Delta x} \cdot \cancel{\Delta y} = P_Y(y|x)\, \cancel{\Delta y} \cdot P_X(x)\, \cancel{\Delta x}$$

$$= P_X(x|y)\, \cancel{\Delta x} \cdot P_Y(y)\, \cancel{\Delta y}$$

$$\Downarrow$$

$$P_{XY}(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y|x)$$

$$= P_X(x|y) \cdot P_Y(y)$$

Für statistisch unabhängige Variablen, gilt:

$$P_Y(y|x) = P_Y(y) \quad ; \quad P_X(x|y) = P_X(x)$$

Die bedingten Entropien werden wie folgt definiert:

$H_0(X|y)$ = Entropie der Eingangsquelle, wenn es bekannt ist daß $Y=y$ ist

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [P_X(x|y)dx] \log_2 \frac{1}{[P_X(x|y)\Delta x]}$$

$$= \log_2 \frac{1}{\Delta x} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} P_X(x|y) \log_2 \frac{1}{P_X(x|y)} dx}_{H(x|y)}$$

Ähnlich:

$H_0(Y|x)$ = Entropie der Ausgangsquelle, wenn es bekannt ist daß $X=x$ ist

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [P_Y(Y|x)\Delta y] \log_2 \left[\frac{1}{P_Y(Y|x)\Delta y}\right]$$

$$= \log_2 \frac{1}{\Delta y} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_y(y|x) \log_2 \frac{1}{p_y(y|x)}\, dy}_{H(Y|x)}$$

Die Äquivokationsentropie $H_0(X|Y)$ wird als der Mittelwert aller $H_0(X|y)$ definiert:

$$H_0(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_y(y)\, H_0(X|y)\, dy$$

$$= \log_2 \frac{1}{\Delta x} + \int_{-\infty}^{\infty} p_y(y)\, H(X|y)\, dy$$

$$= \log_2 \frac{1}{\Delta x} + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{p_y(y)\, p_x(x|y)}^{p(x,y)} \log_2 \frac{1}{p_x(x|y)}\, dx\, dy$$

$$= \log_2 \frac{1}{\Delta x} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x,y) \log_2 \frac{1}{p_x(x|y)}\, dx\, dy}_{H(X|Y)}$$

$$\boxed{H(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y) \log_2 \frac{1}{p_X(x|y)}\, dx\, dy}$$

relative Äquivokationsentropie

Ähnlich:

$H_0(Y|X)$ = Absolute Irrelevanzentropie

$$= \log_2 \frac{1}{\Delta y} + H(Y|X) \; ;$$

$H(Y|X)$ = Relative Irrelevanzentropie

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P_{XY}(x,y) \log_2 \frac{1}{P_Y(y|x)}\, dx\, dy$$

Da $I(X,Y) = H_0(X) - H_0(X|Y) = H_0(Y) - H_0(Y|X)$

$$= \left[H(X) + \cancel{\log_2 \frac{1}{\Delta x}}\right] - \left[H(X|Y) + \cancel{\log_2 \frac{1}{\Delta x}}\right]$$

$$= \left[H(Y) + \cancel{\log_2 \frac{1}{\Delta y}}\right] - \left[H(Y|X) + \cancel{\log_2 \frac{1}{\Delta y}}\right]$$

$$\Rightarrow \quad I(X|Y) = H(X) - H(X|Y)$$
$$= H(Y) - H(Y|X)$$

1.10.2: Der "Hartley-Shannon"-Satz

Der Satz gibt an, welches Maximum kann die Transinformation eines kontinuierlichen Kanals erreichen. Dieses Maximum ist die Kanalkapazität (definitionsgemäß).

$$C_S = \mathrm{Max}\, I(X;Y) = \hat{I}(X;Y)$$ ← für vorgegebenes Rauschverhalten

Da $I(X;Y) = H(Y) - \underbrace{H(Y|X)}$

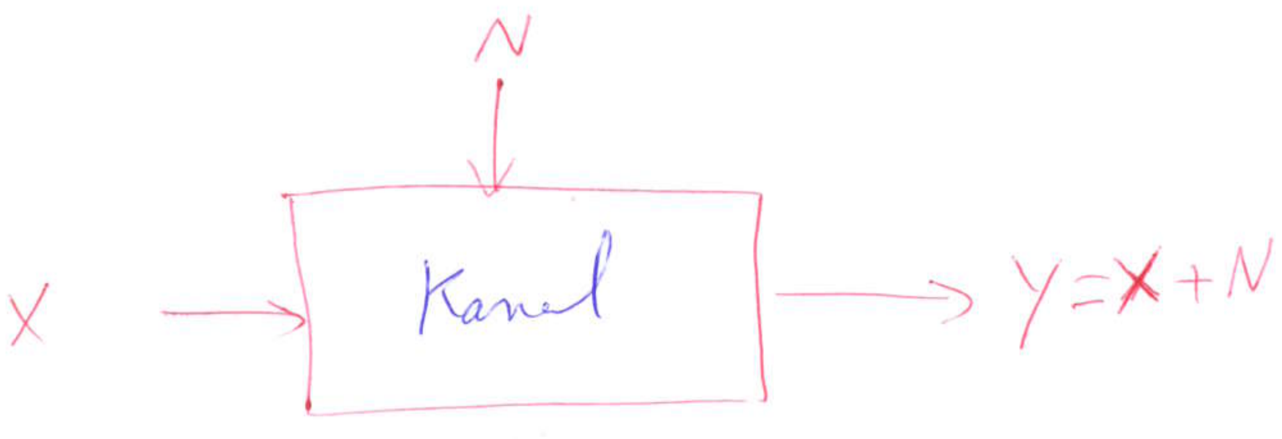
Irrelevanzentropie, die durch das Rauschverhalten vorgegeben ist

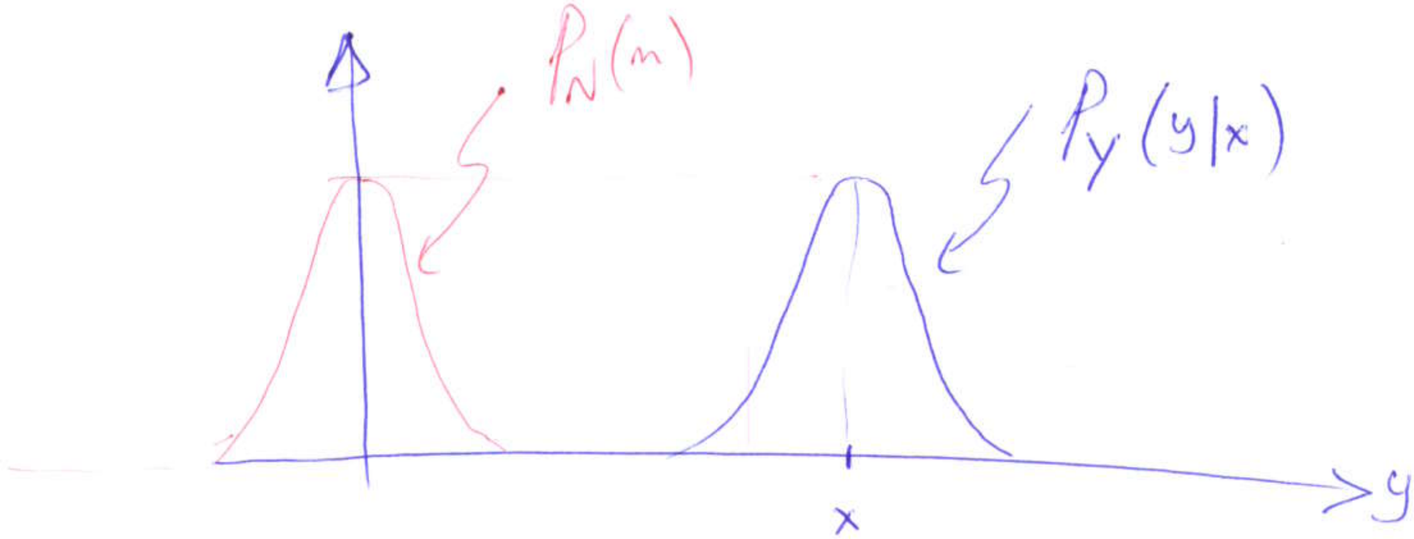
$$\Rightarrow \quad C_s = \hat{I}(X,Y) = \hat{H}(Y) - H(Y|X)$$

Falls die Ausgangsquelle eine vorgegebene „Leistung" besitzt, erreicht $H(Y)$ das Maximum, wenn $P_Y(y)$ Gauß'sche Verteilung ist $\Rightarrow$

$$\hat{H}(Y) = \frac{1}{2}\log_2\left(2\pi e\,\sigma_Y^2\right)$$

wobei $$P_Y(y) = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-\langle y\rangle)^2}{2\sigma^2}}$$





Für additives Rauschen gilt $P_Y(y|x) = P_N(y-x)$

Da $y = x + n \Longrightarrow y - x = n \Longrightarrow$

$P_Y(y|x) = P_N(n)$

für x = konst.: $dy = d(x+n) = dn$

$$H(Y|X) = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(x) \cdot H(Y|x)\, dx \quad , \text{ wobei}$$

$$H(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_Y(y|x) \log_2 \frac{1}{P_Y(y|x)}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} P_N(n) \log_2 \frac{1}{P_N(n)}\, dn$$

$$H(Y|X) = \frac{1}{2}\log_2(2\pi e \sigma_N^2)$$ "unabhängig von x"

$$\Rightarrow H(Y|X) = \frac{1}{2}\log_2(2\pi e \sigma_N^2)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,dx}_{=1}$$

$$\Rightarrow H(Y|X) = \frac{1}{2}\log_2(2\pi e \sigma_N^2)$$

$$C_S = \hat{I}(X,Y) = \frac{1}{2}\log_2(2\pi e \sigma_Y^2) - \frac{1}{2}\log_2(2\pi e \sigma_N^2)$$

$$= \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2\pi e \sigma_Y^2}{2\pi e \sigma_N^2}\right)$$

$$= \log_2\left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_N}\right)$$

$\sigma_X^2 = S$, $\sigma_N^2 = N$

$\Downarrow$

$C_S = \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$

Bits/Symb.

x und n sind statistisch unabhängig

$$C_S = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_N^2}\right)$$

$$\sigma_Y^2 = E\{y^2\} = E\{(x+n)^2\} = E\{x^2\} + 2E\{x\}\cdot E\{n\} + E\{n^2\} = \sigma_X^2 + \sigma_N^2$$