Vorlesung am 12.05.06

5. V

IC
SS-06

1.7.1.: Die bedingte Entropie und die Entropie von Quellen mit Gedächtnis (Fort.)

– Gedächtnis 2. und höhere Ordnung

$$H^{(m)}\left(X \mid (x_j^{(m-1)}; x_k^{(m-2)}\right) = \sum_{i=1}^{M} p\left(x_i^{(m)} \mid (x_j^{(m-1)}, x_k^{(m-2)})\right) \log_2 \frac{1}{p\left(x_i^{(m)} \mid (x_j^{(m-1)}, x_k^{(m-2)})\right)}$$

$$\leq H^{(m)}\left(X \mid x_j^{(m-1)}\right)$$

da das Wissen über die Auswahl von $(x_j^{(m-1)}, x_k^{(m-2)})$ mehr dazu beizutragen, die Auswahl eines bestimmten $x_i^{(m)}$ weiter einzuschränken (d.h. weitere Hetrogenität der bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilung)

Die Entropie der Quelle mit Gedächtnis zweiter Ordnung ist dann

$$H^{(2)}(X) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \underbrace{P\left(x_j^{(m-1)}, x_k^{(m-1)}\right)}_{= P(x_k) \cdot \underbrace{P\left(x_j^{(m-1)} \mid x_k^{(m-2)}\right)}_{= P\left(x_j^{(m)} \mid x_k^{(m-1)}\right)}} \cdot H\left(X \mid \left(x_j^{(m-1)}, x_k^{(m-2)}\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \underbrace{P\left(x_i^{(m)} \mid \left(x_j^{(m-1)}, x_k^{(m-2)}\right)\right) \cdot P\left(x_j^{(m-1)}, x_k^{(m-2)}\right)}_{= p\left(x_i^{(m)}, x_j^{(m-1)}, x_k^{(m-2)}\right)} \cdot \log_2 \frac{1}{P\left(x_i^{(m)} \mid \left(x_j^{(m-1)}, x_k^{(m-2)}\right)\right)}$$

$$H^{(2)}(x) \leq \sum_{j=1}^{M} H\left(x \mid x_j^{(m-1)}\right) \underbrace{\sum_{k=1}^{M} P\left(x_j^{(m-1)}, x_k^{(m-2)}\right)}_{P(x_j)}$$

$$= H^{(1)}(x)$$

Im Allgemeinen:

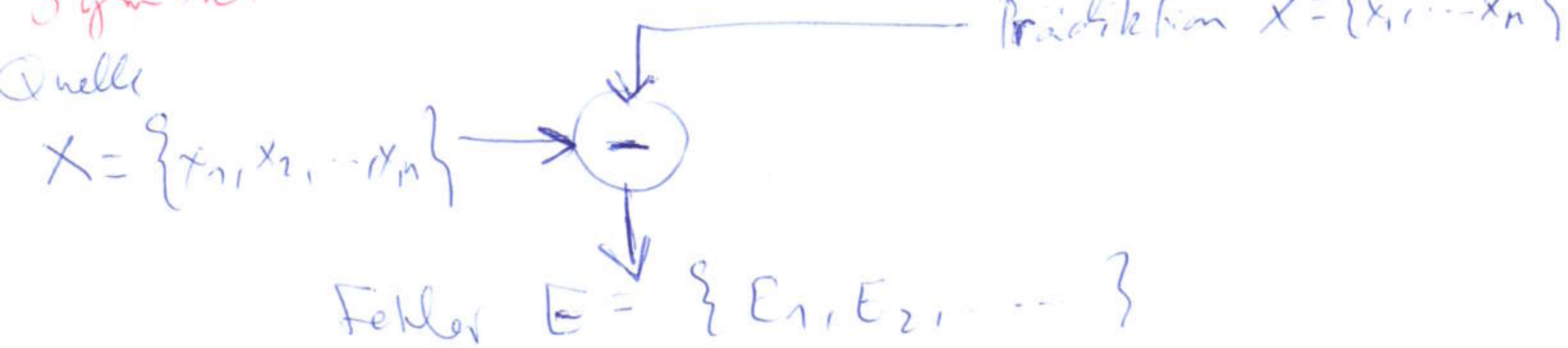
$$H^{(n)}(X) = \overbrace{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \cdots \sum_{l=1}^{M}}^{n \text{ Summen}} p\left(x_i^{(m)}, x_j^{(m-1)}, x_k^{(m-2)}, \ldots x_l^{(m-n)}\right) \log_2 \frac{1}{p\left(x_i^{(m)} \middle| \left(x_j^{(m-1)}, x_k^{(m-2)}, \ldots x_l^{(m-n)}\right)\right)}$$

$$\leq H^{(n-1)}(x)$$

$$H^{(n)}(X) \leq H^{(n-1)}(X) \leq \ldots H^{(1)}(x) \leq H'(x)$$

1.7.2: Die Prädiktionscodierung einer Quelle mit Gedächtnis

Hir wird der Fehler zwischen dem zu übertragenden Symbol und einer Prädiktion codiert!



Das Ziel ist eine neue Informationsquelle zu erzeugen, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung hetrogener als die der ursprünglichen Quelle ist.

$$H(E) < H(X)$$

Dies bedeutet, daß eine Codierung von E zu einer kleineren mittleren Codelänge führt. Da die E-Symbole übertragen werden, muß der Empfänger

1-) die gleiche Prädiktion wie der Sender erzeugen.
2-) das empfangene E-Symbol benutzen, um das X-Symbol wiederherzustellen. Dafür braucht der Empfänger M- E-Symbole, um eine Prädiktion $\hat{X}_i$ in ein der Symbole $X_1, X_2, \ldots X_M$ umzuwandeln. Beispiel:

Prädiktion ist X_3
Falls das E-Symbol E_1 ist, dann ist das X-Symbol X_5, falls E_2, dann X_7,
... etc

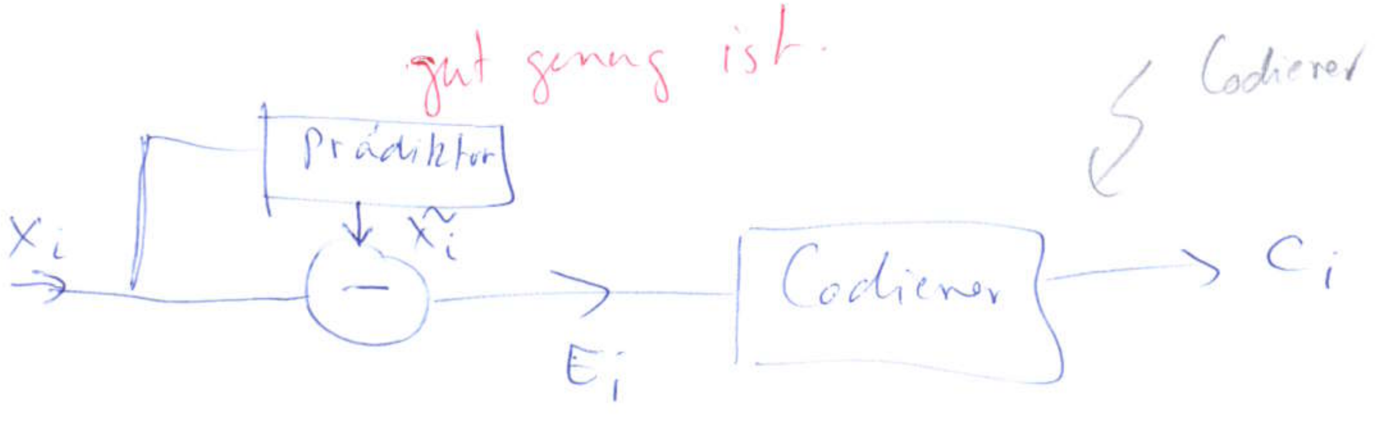
Dafür brauchen wir eine Korrespondenztabelle:

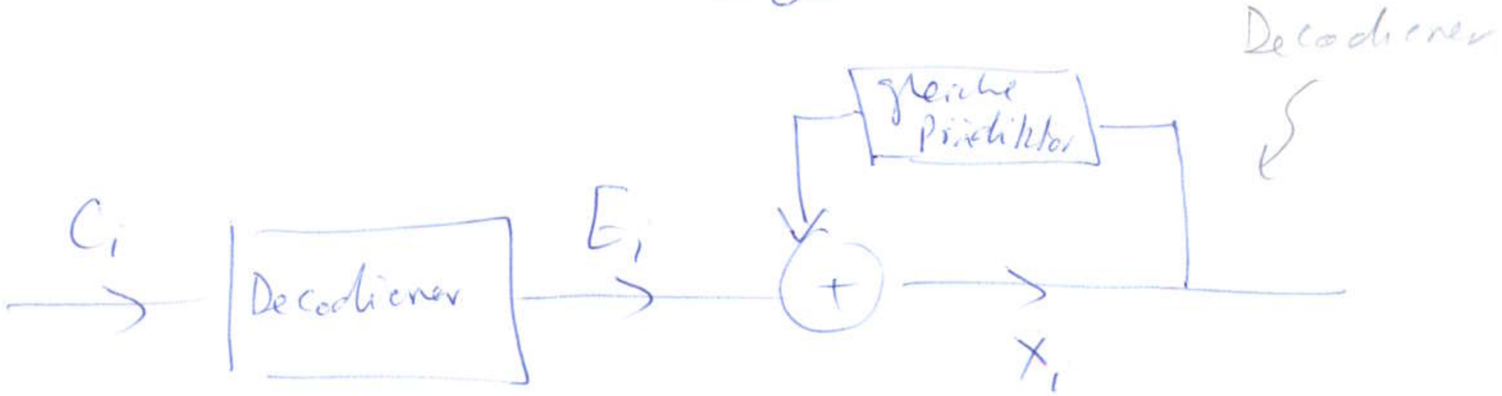
Prädiktion

IQ

$X \backslash \tilde{X}$	x_1	x_2		x_M
x_1	E_1	E_2		E_M
x_2	E_M	E_1		
x_M				E_1

Wichtig ist: Das gleiche E-Symbol zurückübertragen, wenn die Prädiktion und das aus-zuwählende X-Symbol übereinstimmen. Dies garantiert, daß dieses E-Symbol (z.B. E_1) sehr oft auftaucht, wenn die Prädiktion gut genug ist.





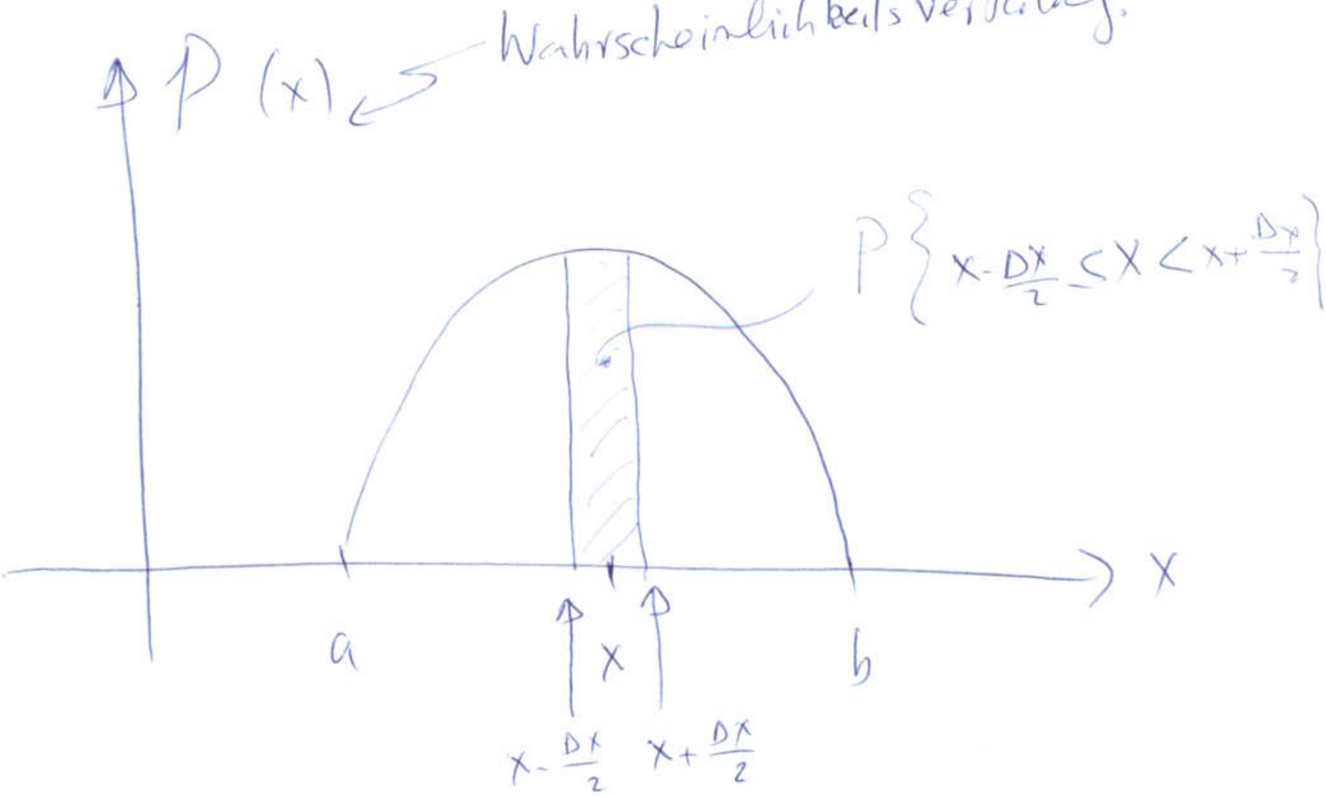
Wichtig: Nutzung des Gedächtnisses führt zum Verlust der Möglichkeit, Fehler zu-erkennen.

1.8: Kontinuierliche Quellen

Eine kontinuierliche Quelle X wird definiert

als $X = \{x;\ a \le x \le b\}$

Jeder Wert x in dem Bereich $a \le x \le b$ kann ausgewählt werden. (Vergleich mit den analogen Pulsmodulationen, wobei die Abtastwerte noch nicht quantisiert sind.



1.8.1: Absolute und relative Entropien

Wegen der begrenzten Auflösung, lassen sich die Symbole x voneinander unterscheiden, wenn sie mindestens ΔX voneinander entfernt sind $\Longrightarrow$ Eine kontinuierliche Quelle X ist in der Tat äquivalent zu einer diskreten Quelle $\bar{X}$ mit M Symbolen:

$$\bar{X} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_M\}$$

$\bar{X}_1$ = Ereignis : $a \leq X < a + \Delta x$

$\bar{X}_2$: $a + \Delta x \leq X < a + 2\Delta x$

$\vdots$

$\bar{X}_M$: $a + (M-1)\Delta x \leq X < \underbrace{a + M \cdot \Delta x}_{= b}$

$$\Longrightarrow \boxed{M = \frac{b-a}{\Delta x}}$$

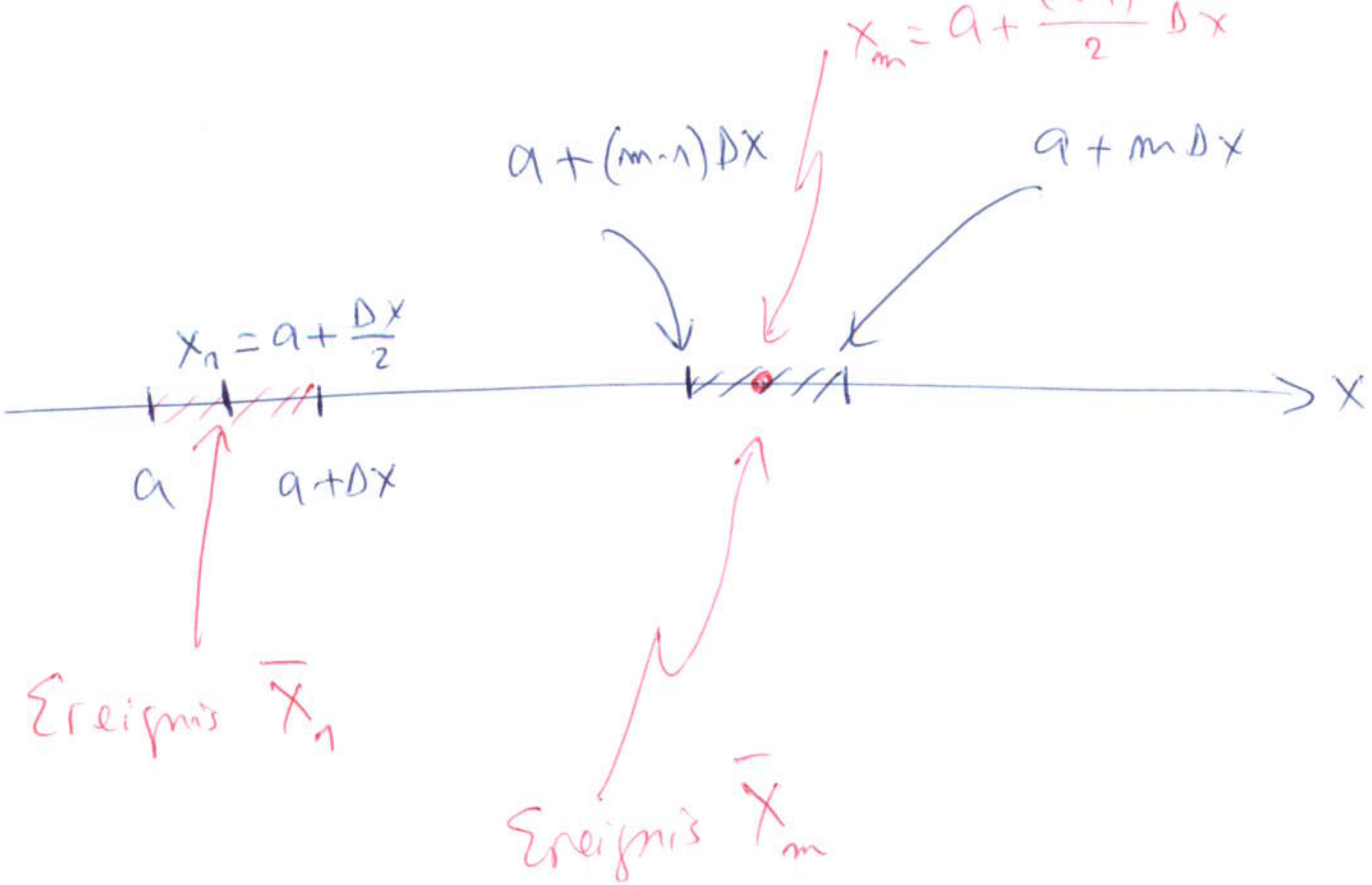
Die entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilung

ist $\bar{P} = \{ P_1, P_2, \ldots, P_M \}$

$$P_1 = \int_a^{a+\Delta x} \rho(x)\, dx, \quad \ldots \quad P_m = \int_{a+(m-1)\Delta x}^{a+m\Delta x} \rho(x)\, dx$$

$\vdots$

Zunächst definieren wir $\quad x_m = a + (m - \frac{1}{2})\Delta x$



x_m = mittlerer Wert des m-ten Intervals

$$\Longrightarrow \qquad P_m \simeq p(x_m)\,\Delta x$$

Die Absolute Entropie $H_0(X)$ wird definiert

als $\qquad H_0(X) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} H(\bar{X})$

$$H(\bar{X}) = \sum_{m=1}^{M} P_m \log_2 \frac{1}{P_m} \simeq \sum_{m=1}^{M} P_m \left[\log_2 \frac{1}{p(x_m)} + \log_2 \frac{1}{\Delta x} \right]$$

$\simeq p(x_m)\Delta x$

$$H(\bar{X}) \simeq \log_2 \frac{1}{\Delta x} + \underbrace{\sum_{m=1}^{M} p(x_m) \log_2 \frac{1}{p(x_m)} \cdot \Delta x}_{\tilde{H}(\bar{X})}$$

$$H(\bar{X}) = \tilde{H}(\bar{X}) + \log_2 \frac{1}{\Delta x}$$

$$\tilde{H}(\bar{X}) = \sum_{m=1}^{M} p(x_m) \log_2 \frac{1}{p(x_m)} \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \tilde{H}(\bar{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log_2 \frac{1}{p(x)} \, dx$$

$$= \underbrace{H(X)}_{\text{relative Entropie}}$$

(sowohl positiv als auch negativ).

$$H_0(X) = \lim_{\Delta x \to 0} H(\bar{X}) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\log_2 \frac{1}{\Delta x} + \tilde{H}(\bar{X}) \right] = H(X) + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \left[\log_2 \frac{1}{\Delta x} \right]}_{\infty}$$