Vorlesung am 28-04.06

3.V

IC
SS-06

## 1.4. : Quellencodierung diskreter gedächtnisfreier Informationsquellen (Fort.)

$$X=\{x_1,x_2,\dots,x_M\} \longrightarrow \boxed{\text{Quellen-codierer}} \longrightarrow C=\{c_1,c_2,\dots,c_{M_c}\}$$

Um effizienter zu sein, können wir die Symbole der X-Quelle paarweise, in dreier, ..., in M-er zusammenfassen, bevor diese auf Segmenten der C Symbole abgebildet werden:

$$X^{(1)} = X = \{x_1, x_2, \dots, x_M\} \quad ; \quad (M\text{-Elemente})$$

$$X^{(2)} = \{(x_1,x_1),(x_1,x_2),\dots,(x_M,x_M)\} \quad (M^2\text{-Elemente})$$

$$X^{(n)} = \{(\overbrace{x_1,x_1,\dots,x_1}^{n\text{-Elemente}}),\ \dots,\ (\overbrace{x_M,x_M,\dots,x_M}^{n\text{-Element}})\} = M^n \text{ Symbole}$$

Falls die einfache Symbolrate $r$ ist, ist die

Symbolrate der IQ $X^{(1)}$, $\frac{r}{n}$. Nun definieren wir

$$N^{(1)} = \{N_1, N_2, \dots, N_M\}$$

$$N^{(2)} = \{N_1^{(2)}, N_2^{(2)}, \dots, N_{M^2}^{(2)}\}$$

Codlängen der paarweise zusammengefassten Symbole

$$\Longrightarrow \quad \bar{N} = \bar{N}^{(1)}, \qquad \text{(einfache Codierung)}$$

$$\bar{N} = \frac{\bar{N}^{(2)}}{2} \qquad \text{(paarweise Zusammenfassung)}$$

$$\vdots$$

$$\bar{N} = \frac{\bar{N}^{(m)}}{m} \qquad \text{(Zusammenfassung in } m\text{-er)}$$

Für eine gedächtnisfreie Quelle, ist die Auftritts-wahrscheinlichkeits des zusammengefasst Symboles $(x_i, x_j, \dots) = P_i \cdot P_j \cdots \Longrightarrow H(X^{(m)}) = m \cdot H(X)$

Beispiel, $m = 2$

$\Rightarrow X^{(2)} = \{(x_1, x_1), \dots, (x_M, x_M)\}$

$$\Rightarrow P^{(2)} = \{ P_1 P_1 ,\ P_1 P_2 ,\ \ldots\ P_M P_M \}$$

$$I^{(2)} = \{ (I_1 + I_1),\ (I_1 + I_2),\ \ldots\ (I_M + I_M) \}$$

$$\Rightarrow H(X^{(2)}) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} P_i P_j \,(I_i + I_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{M} P_j \Big( \sum_{i=1}^{M} P_i I_i \Big) +$$

$$\sum_{i=1}^{M} P_i \cancel{P_i} \Big( \sum_{j=1}^{M} P_j I_j \Big)$$

$$= H(X) + H(X) = 2 H(X)$$

$$X^{(m)} \longrightarrow \boxed{\text{Codierer}} \longrightarrow C$$

Entropie $= m\,H(X)$

Symbolrate $= \frac{r}{m}$

Informationsrate $= m\,H(X) \cdot \frac{r}{m} = r\,H(X)$

Entropie $= H(C)$

Symbolrate $= r_C$

Informationsrate $= r_C\,H(C)$

Das Maximieren von $H(C)$ ist einfacher je $m \uparrow$

## 1.4.1: Eindeutigkeit der Decodierung.

Wie bereits gezeigt wurde, $\bar{N}_b \geq H(X)$, oder die minimale binäre mittlere Codlänge ist die Entropie der Quelle. Dies gilt allerdings, wenn die Decodierung eindeutig ist:

**Codierungsbeispiele**

| | | | ASCII | | Komma-Cod | | nicht eindeutig decodierbar | | Optimaler Cod | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Cod I | | Cod II | | Cod III | | Cod IV | |
| $x_i$ | $p_i$ | $I_i$ | Sequenz | $N_i$ | Sequenz | $N_i$ | Sequenz | $N_i$ | Sequenz | $N_i$ |
| A | $\frac{1}{2}$ | 1 | 00 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| B | $\frac{1}{4}$ | 2 | 01 | 2 | 01 | 2 | 1 | 1 | 10 | 2 |
| C | $\frac{1}{8}$ | 3 | 10 | 2 | 011 | 3 | 10 | 2 | 110 | 3 |
| D | $\frac{1}{8}$ | 3 | 11 | 2 | 0111 | 4 | 11 | 2 | 111 | 3 |

$$H(X) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 + \frac{1}{8}\cdot 3 = 1{,}75 \text{ Bit/Symb}$$

$H(X)$ ist das Minimum für die binäre mittlere Codlänge

$$\bar{N}_I = 2 \text{ Bits/Symb} > 1{,}75$$

$$\overline{N}_{II} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 + \frac{1}{8}\cdot 4 = 1,875 > H(x)$$

$$\overline{N}_{III} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 2 = 1,25 < H(x) \quad ???$$

$$\overline{N}_{IV} = \frac{1}{2}\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ N_1 = I_1}}{1} + \frac{1}{4}\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ N_2 = I_2}}{2} + \frac{1}{8}\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ N_3 = I_3}}{3} + \frac{1}{8}\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ N_4 = I_4}}{3} = 1,75 = H(x)$$

Der Cod $\overline{III}$ ist nicht eindeutig decodierbar, anders ausgedrückt, Die Informationsrate wird durch die Codierung NICHT erhalten. Die Erhaltung der Informationsrate ist allerdings die Voraussetzung für die Aussage $\overline{N}_D \geq H(x)$. Im Cod III ist die Sequenz 10 entweder BA oder C zu decodieren.

Der Cod IV ist der optimale. Im diesem Cod stimmt die Codlänge eines Symbols mit dem entsprechenden Informationsgehalt überein. Da $N_i$ eine ganze Zahl sein muß, ist die Codierung von Quellen mit großen Informationsgehalten $I_i \gg$ effizienter.

Im Codierungsvorgang soll $N_i \geq I_i$, da das Verbrauchen von $N_i < I_i$ schließt die Unterbaum von $N_i$ aus, diese ist großer als die von $(N_i + 1)$. Der Ausschluß des Unterbaums von $N_i$ kann dazu führen, daß man tiefer im restlichen Baum gehen muß, um Codewörter für die restlichen Symbole zu finden.

Prinzipiell $\boxed{I_i \leq N_i < I_i + 1}$

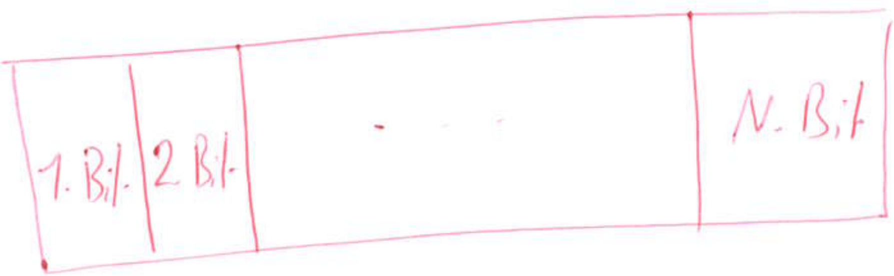
## 1.4.2: Die Präfixeigenschaft

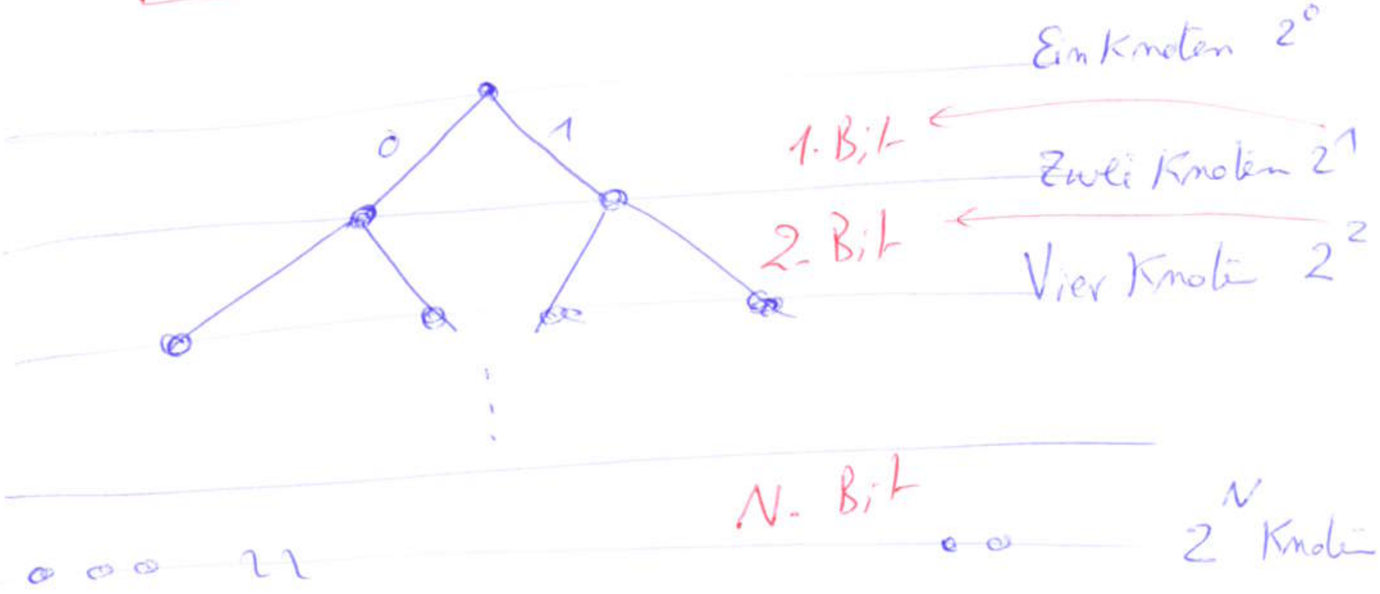
Eine hinreichende und notwendige Bedingung für die augenblickliche und eindeutige Decodierung eines Codes ist die Präfix-eigenschaft.

Präfixeigenschaft: Ein Codewort darf kein Präfix eines anderen Codeworts sein. Dies bedeutet, daß die Auswahl eines Knotens im Codbaum als gültiges Codwort den entsprechenden Unterbaum als gültige Codewörter ausschließt.

Beispiel: <u>Binäre Codes</u>

Codebaum



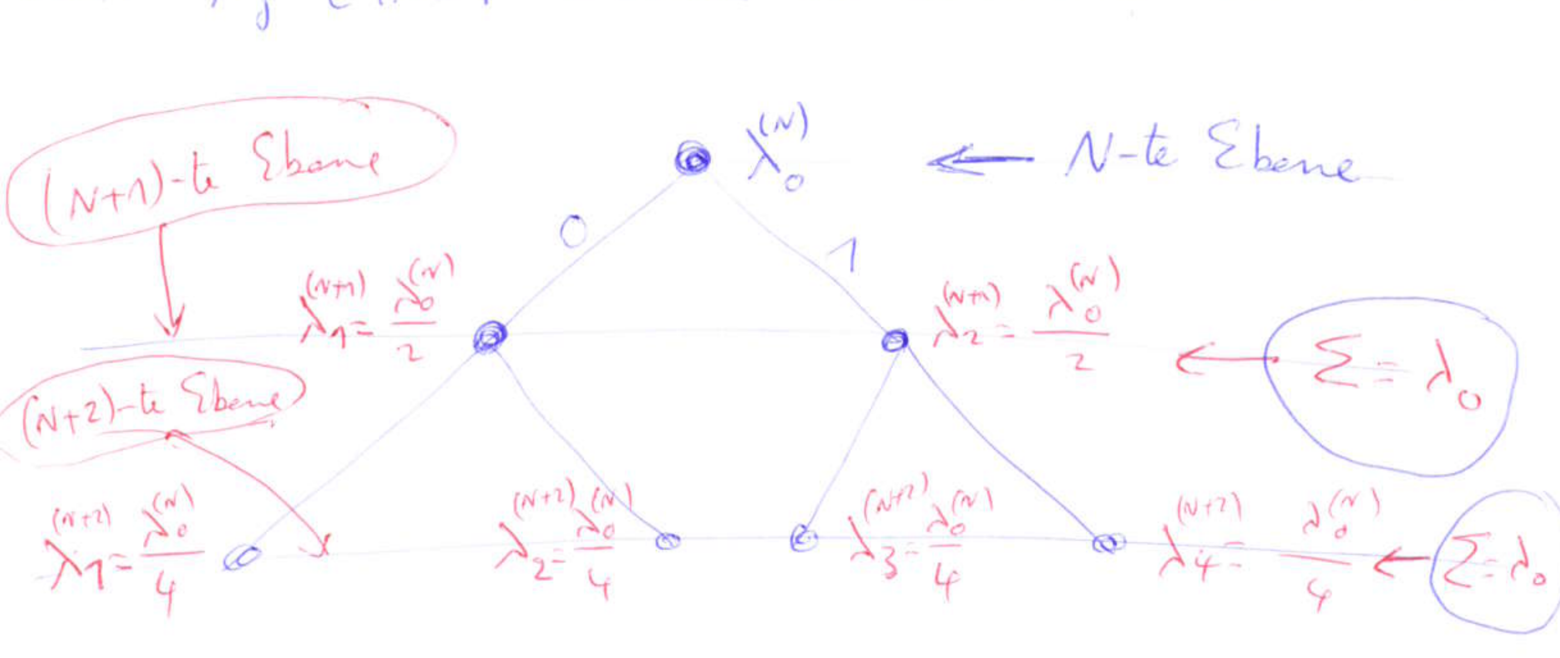
## 1.4.3: Die Kraft'sche Ungleichung

In einem Code, der die Präfix- (oder Suffix-) Eigenschaft erfüllt gilt:

$$K = \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2^{N_i}} \leq 1$$

### Beweis

Jedem Knoten im Codebaum wird eine Zahl $\lambda_i$ zugeordnet, die die Summe aller $\lambda_j^i$ einer Ebene in seinem Unterbaum



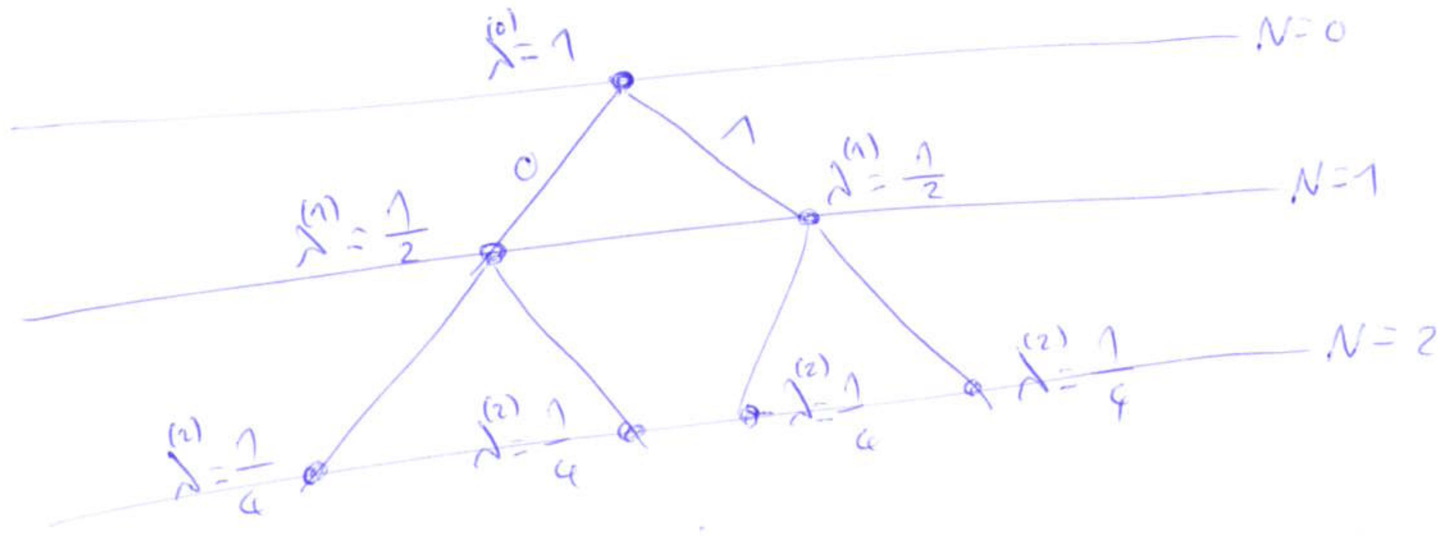
$$\Longrightarrow \quad \lambda_i^{(N+n)} = \frac{\lambda_0^{(N)}}{2^n}$$ , so daß

$2^n$ – Anzahl der Knoten des Unterbaums eines Knoten (der N-ten Ebene) in der (N+n)-te Ebene.

$$\sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i^{(N+n)} = \lambda_0^{(N)} \quad ; \quad \lambda_1^{(N+n)} = \lambda_2^{(N+n)} = \dots = \lambda_{2^n}^{(N+n)}$$

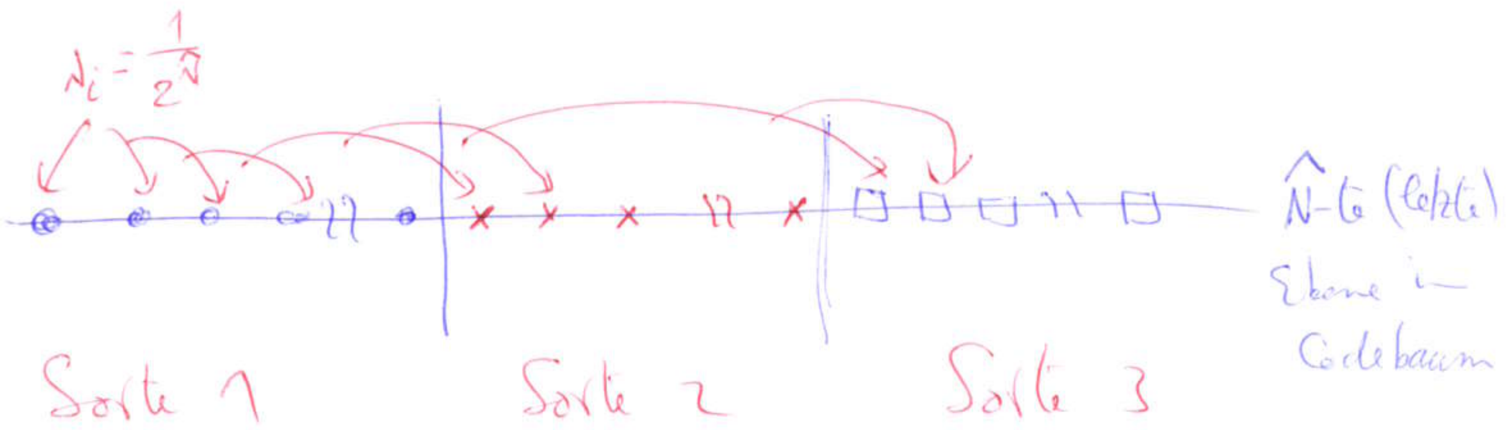
Wählt man $\lambda_0^{(0)} = 1$ , so erhalten wir

$$\boxed{\lambda_i^{(N)} = \frac{1}{2^N}}$$




In der N-ten Ebene, gibt's $2^N$ Knoten, jede hat $\lambda = \frac{1}{2^N} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{2^N} \lambda_i^{(N)} = 1$

Betrachtet man nun die letzte Ebene im Codebaum, so erhält man folgendes




Sorte 1: Knoten, die ausgeschlossen sind

Sorte 2: Knoten, die nicht gewählt wurden

Sorte 3: Knoten, die als gültige Codewörter gewählt wurden.

Nun $$1 = \sum_{i=1}^{2^{\hat N}} \lambda_i \qquad \lambda_i = \frac{1}{2^{\hat N}}$$

$$1 = \sum_{\text{Sorte 1}} + \sum_{\text{Sorte 2}} + \sum_{\text{Sorte 3}}$$

$$= \sum \frac{1}{2^{N_i}}$$

da jede gruppe dieser Sorte einem bestimmten Codwort zuzuordnen sind

$$= \sum \frac{1}{2^{N_i}}$$

da diese Knoten gültige Codewörter sind

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2^{N_i}} \leq 1$$

## 1.5 : Das Codierungstheorem von Shanon

Dieses Contest :

1-) Die minimale mittlere Codelänge eines binären Codes ist die Quellenentropie $H(X)$

2.) Es ist immer möglich, einen Code zu finden, wobei $\bar{N} - H(x)$ beliebig klein ist

## Beweis

Bereits haben wir gezeigt, daß die Erhaltung der Informationsrate dazu führt, daß

$$\overline{N_b} = \frac{r_b}{r} = \frac{H(x)}{\Omega(p)} \quad ; \quad \Omega(p) \leq 1$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{N}_b \geq H(x).$$

Die Erhaltung der Informationsrate bedeutet allerdings, daß der Code eindeutig decodierbar ist. Dies verlangt, daß der Code entweder die Präfix- oder die Suffix-Eigenschaft erfüllt. $\Longrightarrow \quad K = \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2^{N_i}} \leq 1$

Wir definieren $Q_i = \frac{1}{K\,2^{N_i}} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{M} Q_i = 1$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{M} (Q_i - P_i) = 0$$

$$\geq \ln\left(\frac{Q_i}{P_i}\right)$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{M} P_i \left(\frac{Q_i}{P_i} - 1\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{M} P_i \left[\ln(Q_i) - \ln(P_i)\right] \leq 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{M} P_i \ln\left(\frac{1}{P_i}\right) + \sum_{i=1}^{M} P_i \left[-\ln(k) - \ln(2^{N_i})\right] \leq 0$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{M} P_i \log_2\left(\frac{1}{P_i}\right)}_{H(X)} + \log_2\left(\frac{1}{k}\right) \sum_{i=1}^{M} P_i - \underbrace{\sum_{i=1}^{M} P_i N_i}_{\overline{N}_b} \leq 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\overline{N}_b \geq H(X) + \log_2\left(\frac{1}{K}\right)}$$

Es ist vorteilhaft, wenn $K = 1$. Dies ist nur möglich, wenn die Knoten der letzten Baumebene entweder aus einem gültigen Codewort stammen, oder sind selber gültige Codewörter..