Vorlesung am 07.04.06

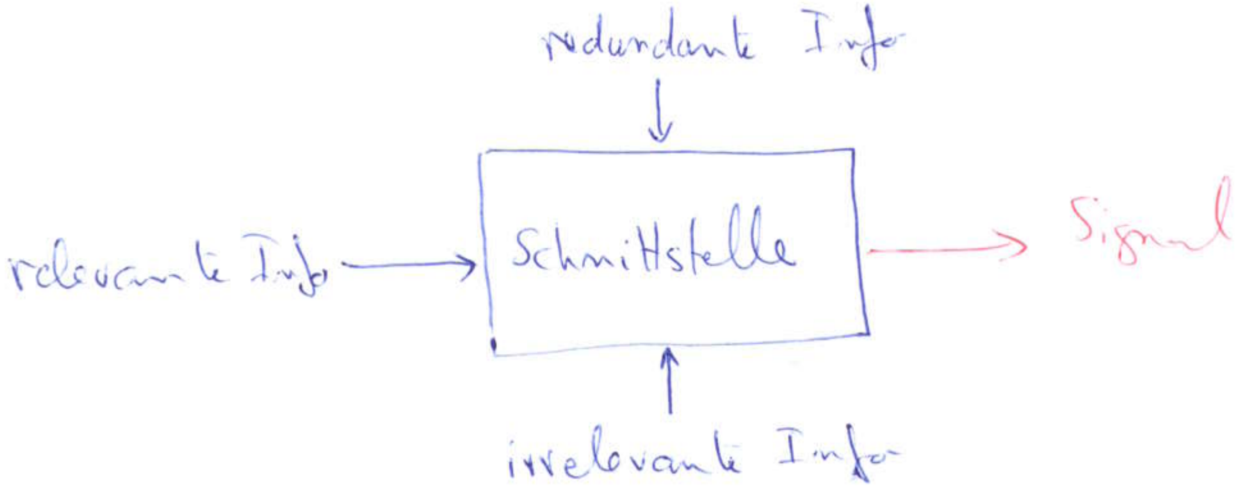
1.V

IC
SS-06

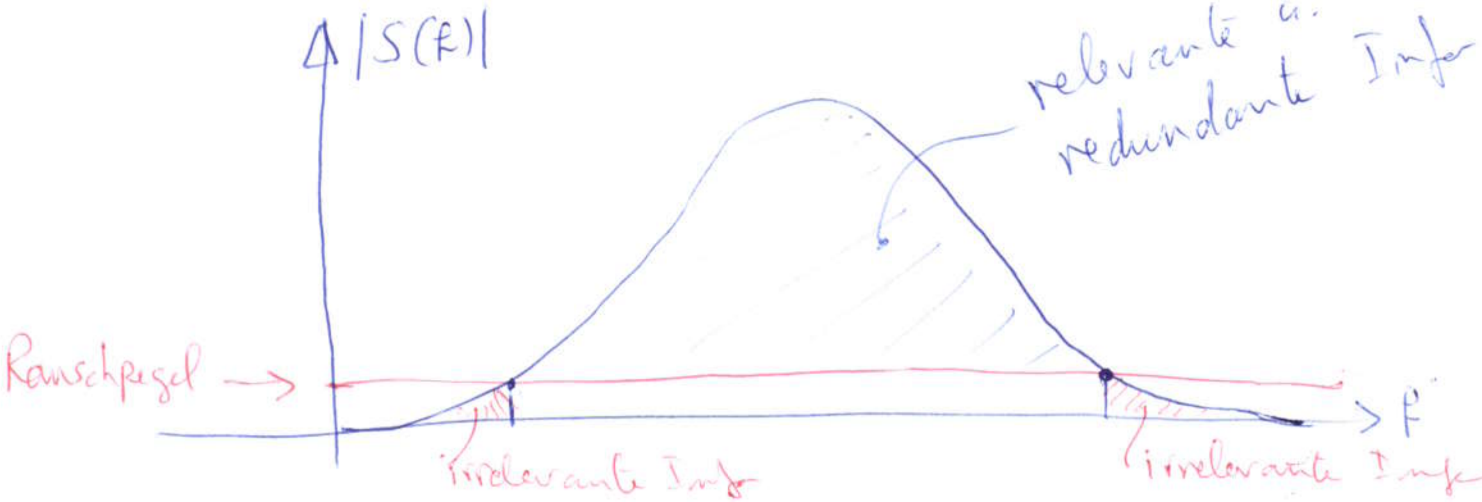
Einleitung

0.1: Signale und Information

Signale sind Informationsträger. Sie werden mit Hilfe einer Schnittstelle erzeugt:



Beispiel: Das Audiospektrum



0.2: Redundanz

Die Redundanz ist die Wiederholung der Information in verschiedenen Teilen des Signals (zeitlich, spektral, oder anders).

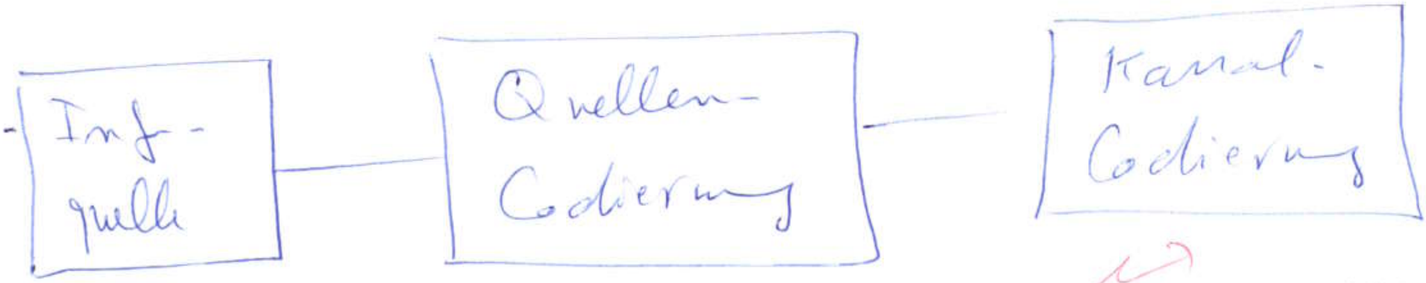
Beispiel: Die Abhängigkeit der Auftrittswahrscheinlichkeiten der Buchstaben, Wörter, Sätze ...etc. voneinander.

Wahrscheinlichkeit von $u = 8\,\%$, Wahrscheinlichkeit von u nach $q = 98\,\%$

Redundanz kann

- nachteilhaft: verlangsamt die Kommunikation/oder vergrößert den Speicherplatz unnötig
- vorteilhaft: kann benutzt werden, um Fehler zu erkennen u./od. korrigieren

In einem digitalen Kommunikationssystem (Speicher) werden die unkontrolliert eingebauten Redundanzen koseitigt (Datenkompression) und andere, kontrollierte zugefügt.



Kompression (Beseitigung der Redundanten)

Zufügung von kontrollierten Redundanzen.

Informationstheorie: beschäftigt sich mit der Beseitigung der Redundanz.

Codierungstheorie: beschäftigt sich mit der Zufügung der Redundanz

Kapitel 1: Die Informationstheorie

1.1: Informationsquellen

Eine Informationsquelle ist mathematisch ein Satz von Symbolen (Buchstaben), dessen Elemente zufällig gewählt (auftreten) und gesendet (gespeichert) werden.

1.1.1: Klassifikation

Info-Quellen

- Diskret
  - endliche Zahl von diskreten (einzelnen) Symbolen (Buchstaben, Zahlen, Zeichen)
- Kontinuierlich
  - unendliche Zahl von Symbolen, die auf, z.B., $a \leq x \leq b$ abgebildet werden können

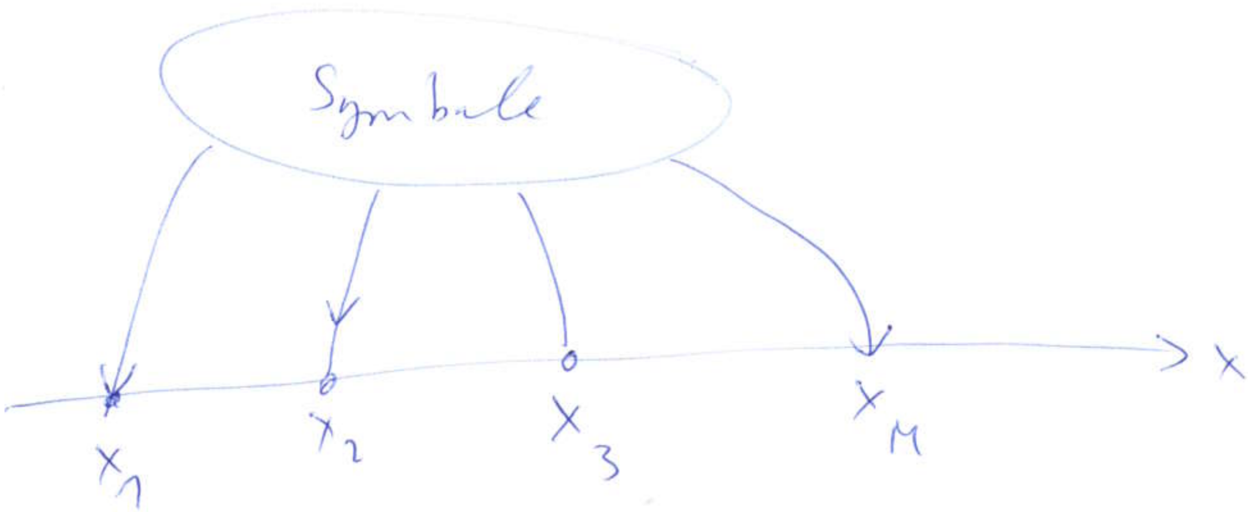
Info-Quelle

- mit Gedächtnis
  - Das Eintreten eines Symbols hängt von den vorher eingetretenen Symbolen ab (Beispiel: q u. u)
- gedächtnislos
  - Das Eintreten eines Symboles ist von den vorher eingetretenen Symbolen unabhängig

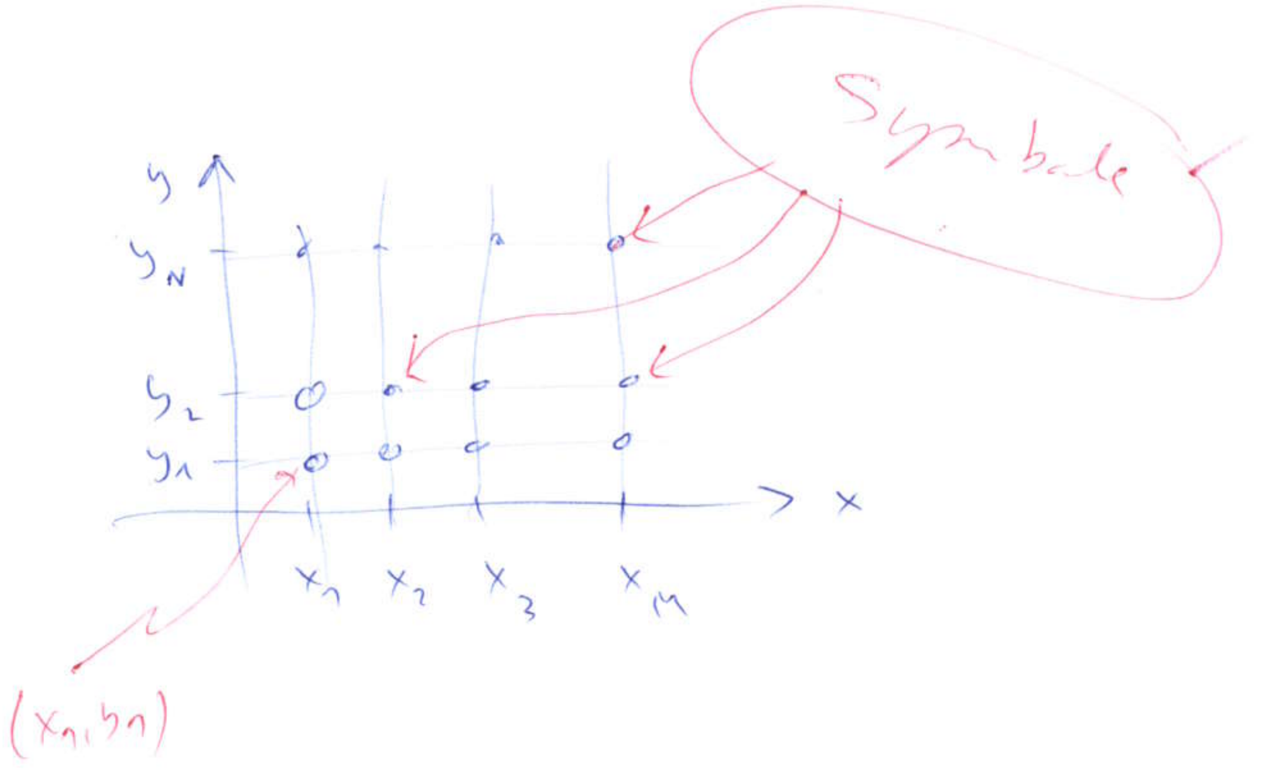
1.1.2: Darstellung

Die Symbole einer Quelle können auf 1-D, 2-D, ... N-D Anordnungen abgebildet werden.

1-D



2-D



Die 2-D-Abbildung ist vorteilhaft für Quellen, deren Symbole ~~Zusa~~ paarweise Zusammenfassung von anderen "elementaren" Symbolen

N-Dimensional: Achsen $x^{(n)}$; $n = 1, 2, \dots, N$

Elemente $\{ (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(N)}),$
$(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_2^{(N)});$
$\vdots$
$\}$

Für 1-D diskrete Quellen stellt der Satz $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ eine diskrete Zufallsvariable.

Für N-D diskrete Quelle stellt der Satz $\{(x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(N)}), \dots\}$ eine diskrete N-D Zufallsvariable

Kontinuierliche Quellen werden auf kontinuierliche 1-D, 2-D, ... N-D Zufallsvariablen abgebildet

1.2: Auftrittswahrscheinlichkeit und Informationsgehalt der Symbole einer diskreten 1-D-Quelle

Quelle $X = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$

Entsprechende Auftrittswahrscheinlichkeit

$$P = \{P_1, P_2, \dots, P_M\}$$

$$0 \le P_i \le 1 \quad ; \; i = 1, 2, \dots, M$$

$$\sum_{i=1}^{M} P_i = 1$$

Informationsgehalt = Maß der "Überraschung" oder der "Nichterwartung".

Eigenschaften: 1.) $I_i \uparrow$ wenn $P_i \downarrow$

$\Longrightarrow I_i = F\left(\frac{1}{P_i}\right)$; $F(x)$ ist eine ansteigende Funktion

2.) $I_i = 0$, wenn $P_i = 1$

$\Longrightarrow F(1) = 0$

$I_{ij} = I_i + I_j$ Falls $\underbrace{P_{ij} = P_i \cdot P_j}_{\text{unabhängige Ereignisse}}$

Hier bilden wir $X^{(2)} = \left\{ (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}), (x_1^{(1)}, x_2^{(2)}), \ldots, (x_M^{(1)}, x_M^{(2)}) \right\}$

wobei $(x_i^{(1)}, x_j^{(2)})$ bedeutet, x_i wurde zuerst ausgewählt und x_j wurde dann (danach) ausgewählt.

Hier bedeutet $P_{ij} = P\{(x_i^{(1)}, x_j^{(2)})\}$.

Eigenschaften:

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} P_{ij} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{M} P_{ij} = P_j$$

$$\sum_{j=1}^{M} P_{ij} = P_i$$

Falls die Quelle gedächtnisfrei ist, dann gilt $P_{ij} = P_i \cdot P_j$

$$\Longrightarrow \quad I_{ij} = F\left(\frac{1}{P_{ij}}\right) = F\left(\frac{1}{P_i P_j}\right)$$

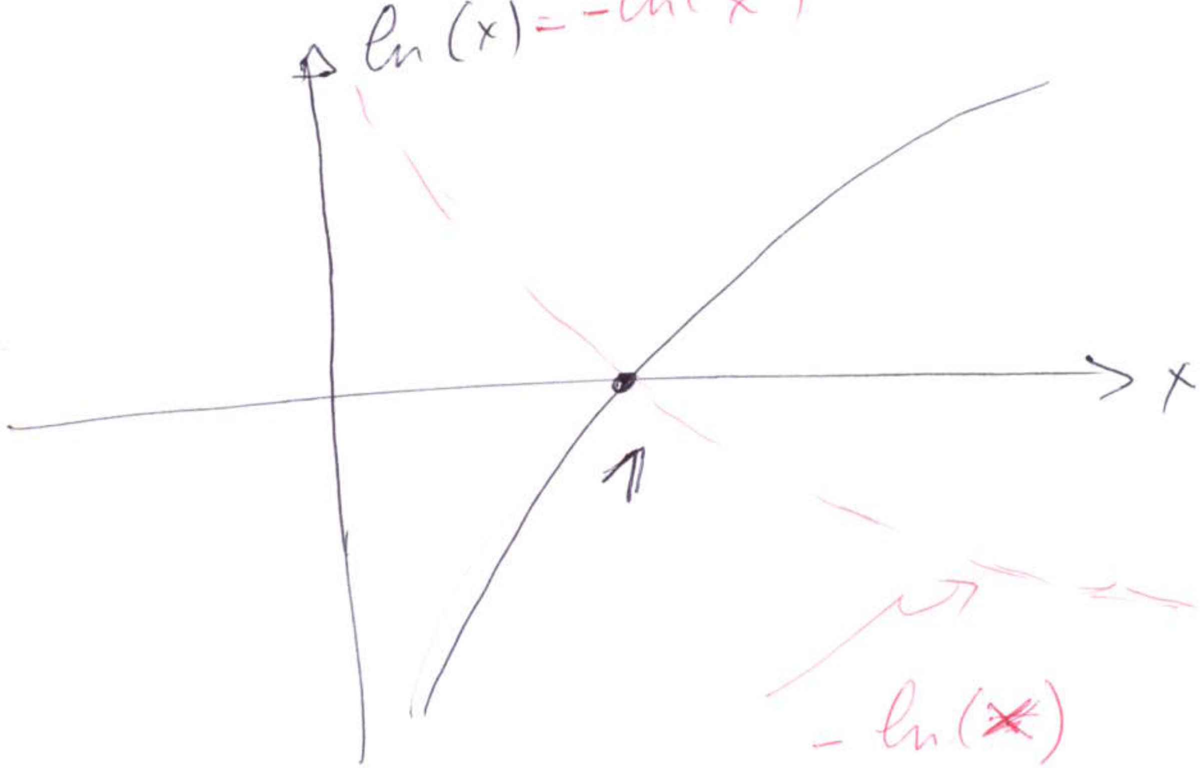
Hier haben wir die Summe der Informationen

I_i und I_j gewonnen $\longrightarrow$

$$F\left(\frac{1}{p_i p_j}\right) = F\left(\frac{1}{p_i}\right) + F\left(\frac{1}{p_j}\right)$$

Die geeignete Funktion ist die logarithmische Funktion $\Longrightarrow$ $\boxed{I_i = \log\frac{1}{p_i} = -\log p_i}$

Die Basis spielt keine Rolle



Da $b^{\log_b(x)} = x \Longrightarrow \boxed{\ln x = \log_b(x) \cdot \ln b}$