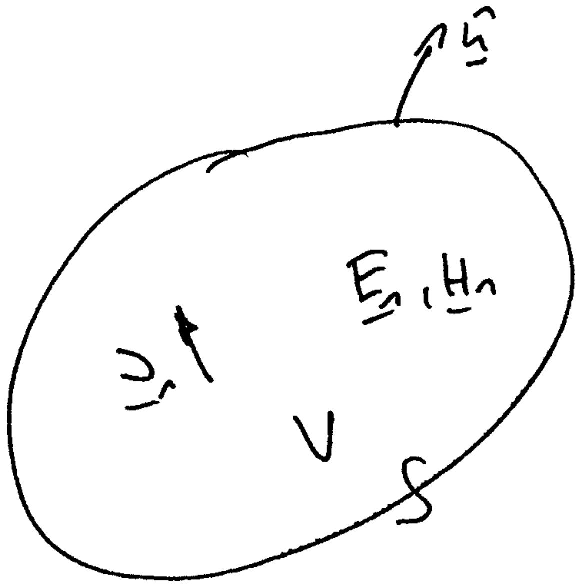
# Einführung in die Hochfrequenztechnik - Vorlesung 6

Tobias Meyer, A. S. Omar und A. Jöstingmeier

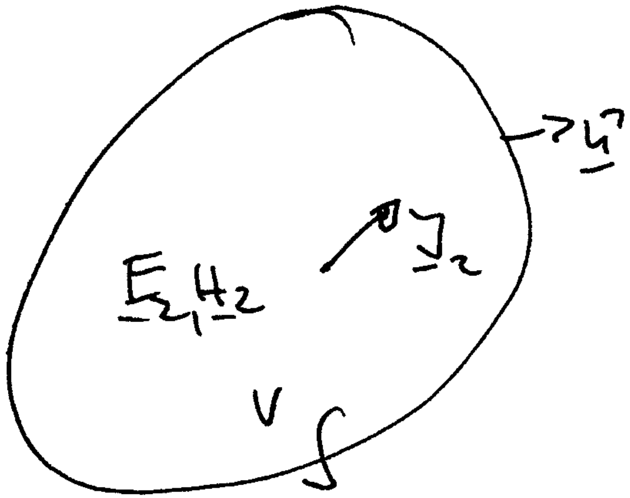
©1999-2004

Reziprozität: Betrachtung von 2 Quellen im Volumen $V$ mit der Oberfläche $S$ und dem Normalvektor $\underline{\hat{n}}$.




$$\underline{\nabla} \times \underline{E}_1 = -j\omega\mu\underline{H}_1$$
$$\underline{\nabla} \times \underline{H}_1 = j\omega\varepsilon\underline{E}_1 + \underline{J}_1$$

2. Quelle: Die Maxwellschen Gleichungen sind für beide Quellen und die dazugehörigen Felder individuell erfüllt.




$$\underline{\nabla} \times \underline{E}_2 = -j\omega\mu\underline{H}_2$$
$$\underline{\nabla} \times \underline{H}_2 = j\omega\varepsilon\underline{E}_2 + \underline{J}_2$$

Vektoridentität

- für zwei beliebige Vektorfelder $\underline{A}$ und $\underline{B}$ gilt:
  $\underline{\nabla} \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = (\underline{\nabla} \times \underline{A}) \cdot \underline{B} - (\underline{\nabla} \times \underline{B}) \cdot \underline{A}$

- Diese Vektoridentität wird auf die beiden Quellen und deren Felder angewendet.

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) =$$

$$(\underline{\nabla} \times \underline{E}_1) \cdot \underline{H}_2 - (\underline{\nabla} \times \underline{H}_2) \cdot \underline{E}_1 - (\underline{\nabla} \times \underline{E}_2) \cdot \underline{H}_1 + (\underline{\nabla} \times \underline{H}_1) \cdot \underline{E}_2$$

unter Verwendung der Maxwellschen Gleichungen ergibt sich daraus

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) =$$

$$-j\omega\mu\underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2 - (j\omega\varepsilon\underline{E}_2 + \underline{J}_2) \cdot \underline{E}_1 - (-j\omega\mu\underline{H}_2) \cdot \underline{H}_1 + (j\omega\varepsilon\underline{E}_1 + \underline{J}_1) \cdot \underline{E}_2 =$$

$$-\underline{J}_2 \cdot \underline{E}_1 + \underline{J}_1 \cdot \underline{E}_2$$

Anwendung des Gauschen Satzes

$$\int_V \underline{\nabla} \cdot (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) dV =$$

$$\oint_S (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot \underline{\hat{n}} dS =$$

$$\int_V (-\underline{J}_2 \cdot \underline{E}_1 + \underline{J}_1 \cdot \underline{E}_2) dV$$

Das Oberflächenintegral verschwindet in 4 Fällen:

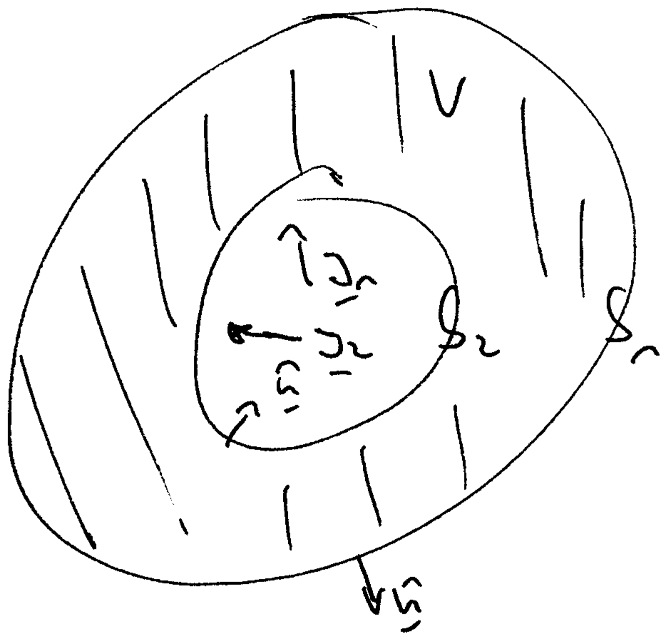
1. elektrisch leitende Oberfläche $\underline{E}_1 \times \underline{\hat{n}} = 0$, $\underline{E}_2 \times \underline{\hat{n}} = 0$, da $(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2) \cdot \underline{\hat{n}} = (\underline{\hat{n}} \times \underline{E}_1) \cdot \underline{H}_2)$

2. magnetisch leitende Oberfläche $\underline{H}_1 \times \underline{\hat{n}} = 0$, $\underline{H}_2 \times \underline{\hat{n}} = 0$

3. V ist ein quellenfreies Gebiet $\underline{J}_1 = 0$, $\underline{J}_2 = 0$

4. im Fernfeld (ebene Wellen), da $\underline{E}_1 = Z_0(\underline{H}_1 \times \underline{\hat{n}})$ und $\underline{E}_2 = Z_0(\underline{H}_2 \times \underline{\hat{n}})$

Oberflächenintegral für Oberfläche, die alle Quellen umschliesst




$S_1$ wird weit entfernt von allen Quellen gewhlt

Oberflächenintegral für Oberfläche, die alle Quellen umschliesst

$$\oint_S (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot \underline{\widehat{n}} dS = \int_V (-\underline{J}_2 \cdot \underline{E}_1 + \underline{J}_1 \cdot \underline{E}_2) dV = 0$$

Das Integral verschwindet, da das schraffierte Gebiet quellenfrei ist.

$$\oint_{S1} (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot \underline{\widehat{n}} dS + \oint_{S2} (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot \underline{\widehat{n}} dS = 0$$

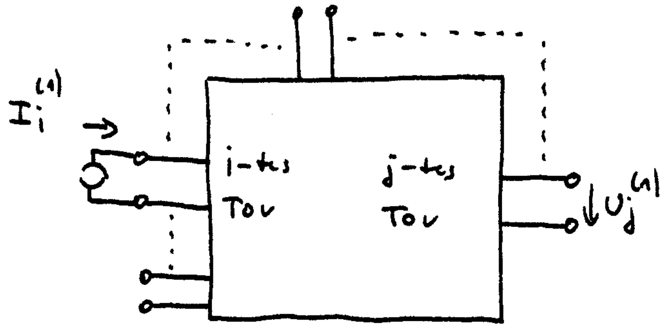
Der erste Beitrag zum Integral verschwindet, da auf $S_1$ die Quellen im Fernfeld sind.

$$\oint_{S2} (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot \underline{\widehat{n}} dS = 0$$

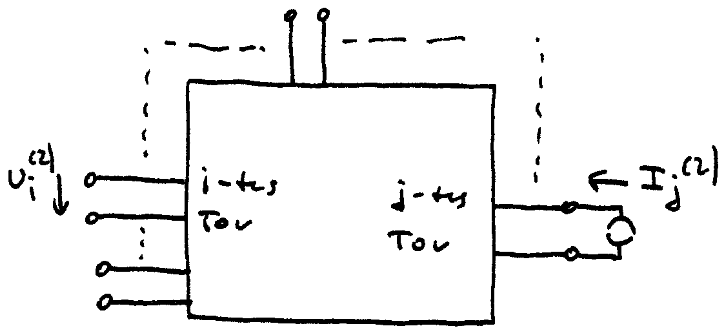
Das Volumenintegral ist gleich null für alle Flächen $S_2$, die alle Quellen umschliessen.

# Anwendung des Reziprozitätstheorems auf Netzwerke

1. Fall:

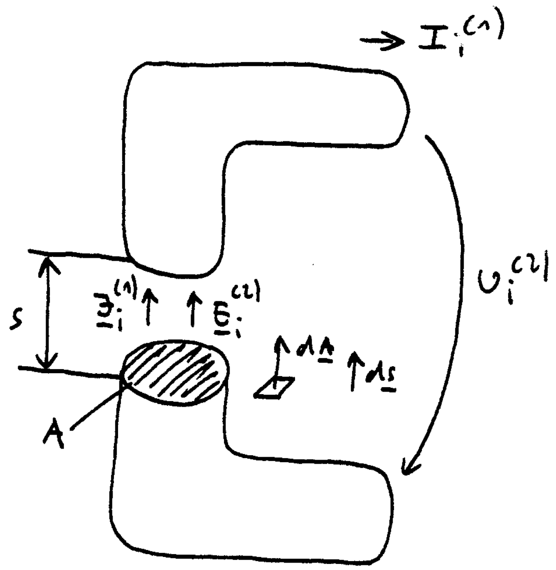



2. Fall:



- 2 Zustände
- Fall 1:Stromquelle an Tor $i$, Tor $j$ läuft leer
- Fall 2:Stromquelle an Tor $j$, Tor $i$ läuft leer

Untersuchung von Tor $i$




$U_i^{(2)}$ Spannung an Tor $i$ aufgrund von Strom $I_j^{(2)}$ wenn Tor $i$ Leerläuft.

Anwendung des Reziprozitätstheorems auf Netzwerke

Beitrag von Tor $i$ zum Volumenintegral.

$$\int_V J_i^{(1)} E_i^{(2)} dV = \int_A J_i^{(1)} dA \int_s E_i^{(2)} ds = -I_i^{(1)} U_i^{(2)}$$

Beitrag von Tor $j$ zum Volumenintegral.

$$\int_V J_j^{(2)} E_j^{(1)} dV = \int_A J_j^{(2)} dA \int_s E_j^{(1)} ds = -I_j^{(2)} U_j^{(1)}$$

Das Flächenintegral, das alle Quellen umschliesst, muss verschwinden.

$$-I_i^{(1)} U_i^{(2)} = -I_j^{(2)} U_j^{(1)}$$

Symmetrieeigenschaften der Impedanz- und Admittanzmatrix

$$\frac{U_i^{(2)}}{I_j^{(2)}} = \frac{U_j^{(1)}}{I_i^{(1)}}$$

$$Z_{ij} = Z_{ji}$$

Reziprozität bedeutet Symmetrie der Z und der Y Matrix.

$[Z] = [Z]^T$

und

$[Y] = [Y]^T$

Umrechnung der S- in die Z-Matrix

$$U = [Z]I$$

$$\sqrt{Z_c}(A + B) = [Z]\frac{1}{\sqrt{Z_c}}(A - B)$$

$$(A + [S]A) = [Z]\frac{1}{Z_c}(A - [S]A)$$

normierte Impedanzmatrix

$$[\overline{Z}] = [Z]\frac{1}{Z_c}$$

$$([I] + [S])A = [\overline{Z}]([I] - [S])A$$

Umrechnung der S- in die Z-Matrix

$$([I] + [S]) = [\overline{Z}]([I] - [S])$$

$$[\overline{Z}] = ([I] + [S])([I] - [S])^{-1}$$

Dies entspricht der bereits bekanten Beziehung für ein 1-Tor.

$$\overline{Z}_{in} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

Umrechnung der Z- in die S-Matrix

$$([I] + [\overline{Z}])[S] = ([\overline{Z}] - [I])$$

$$[S] = ([\overline{Z}] + [I])^{-1}([\overline{Z}] - [I])$$

Dies entspricht der bereits bekannten Beziehung für ein 1-Tor.

$$\Gamma = \frac{\overline{Z} - 1}{\overline{Z} + 1}$$

Eigenschaften der S-Matrix

- Genau wie die Z- und Y-Matrix ist auch die S-Matrix reziproker N-Tore symmetrisch.
  $[S] = [S]^T$

- Die S-Matrix verlustloser N-Tore ist unitär.

Beweis der Unitarität

$|B|^2 = |A|^2$ Die reflektierte Wirkleistung ist gleich der einfallenden Wirkleistung.

$B^{*t}B = A^{*t}A$

$([S]A)^{*t}[S]A = A^{*t}A$

$A^{*t}[S]^{*t}[S]A = A^{*t}[I]A$

$[S]^{*t}[S] = [I]$

$[S]^{*t} = [S]^{-1}$

Die S- Matrix verlustloser Bauelemente ist unitär.

S-Matrix eines reziproken, symmetrischen und verlustlosen 2-Tores

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

- Reziprozität: $[S] = [S]^T$, $S_{12} = S_{21}$

- Symmetrie: $S_{11} = S_{22}$

- Verlustlosigkeit: $[S]^{*T}[S] = [I]$
  $|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1$
  $|S_{21}| = \sqrt{1 - |S_{11}|^2}$

Ausnutzung der Unitarität

- $S_{11}^* S_{12} + S_{21}^* S_{22} = 0$
- $|S_{11}||S_{21}|e^{j(-\varphi+\theta)} + |S_{11}||S_{21}|e^{j(\varphi-\theta)} = 0$
- $e^{j2(-\varphi+\theta)} = -1$
- $2(-\varphi + \theta) = m\pi$
- $\theta = \frac{\pi}{2}m + \varphi$

- Die S-Matrix eines verlustlosen, symmetrischen reziproken 2-Tores hat nur noch 2 unabhängige Eemente.

- Aus Betrag und Phase des Reflexionskoeffizienten $S_{11}$ können alle anderen S-Parameter berechnet werden.