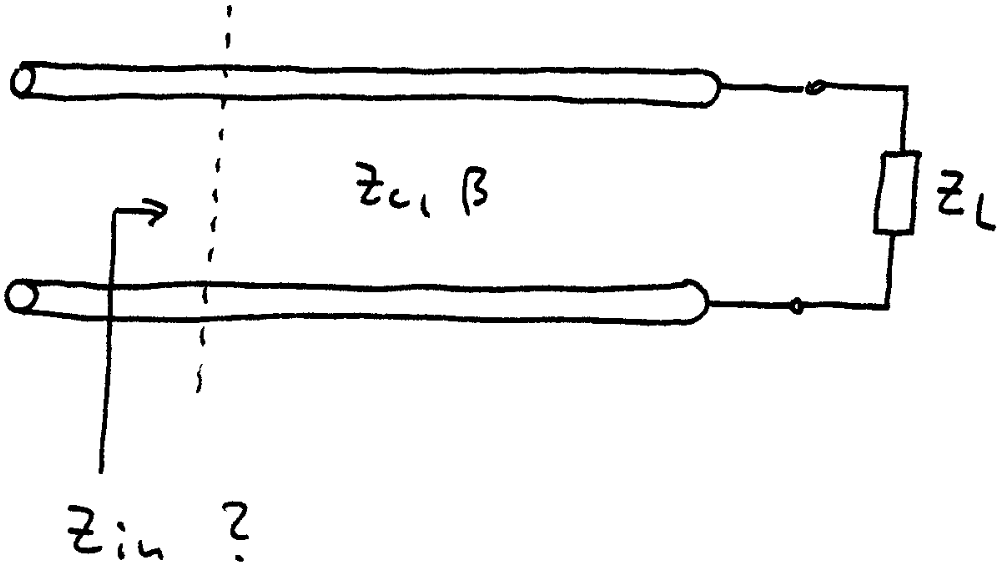
Einführung in die Hochfrequenztechnik - Vorlesung 3

Tobias Meyer, A. S. Omar und A. Jöstingmeier

Impedanztransformation - Problemstellung



Wie hängt die Eingangsimpedanz Z_{in} von der Position auf der Leitung ab ?

Impedanztransformation

- Transformation des Reflexionskoeffizienten:

- $\Gamma(l) = \frac{U^- e^{-j\beta l}}{U^+ e^{j\beta l}} = \frac{U^-}{U^+} e^{-2j\beta l} = \Gamma_L e^{-2j\beta l}$

- normierte Eingangsimpedanz $\overline{Z}_{in}(l) = \frac{Z_{in}}{Z_C} = \frac{U(l)}{I(l) Z_C}$

- $\overline{Z}_{in}(l) = \frac{U^+ e^{j\beta l} + U^- e^{-j\beta l}}{Z_C (I^+ e^{j\beta l} - I^- e^{-j\beta l})}$

- mit $I^+ = U^+/Z_C$ und $I^- = U^-/Z_C$, Multiplikation mit $e^{-j\beta l}$:

- $\overline{Z}_{in}(l) = \frac{U^+ + U^- e^{-2j\beta l}}{U^+ - U^- e^{-2j\beta l}}$

- $= \frac{1 + \frac{U^-}{U^+} e^{-2j\beta l}}{1 - \frac{U^-}{U^+} e^{-2j\beta l}}$

- $= \frac{1 + \Gamma_L e^{-2j\beta l}}{1 - \Gamma_L e^{-2j\beta l}}$

- mit $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$

- $\overline{Z}_{in}(l) = \frac{(Z_L + Z_C) + (Z_L - Z_C)e^{-2j\beta l}}{(Z_L + Z_C) - (Z_L - Z_C)e^{-2j\beta l}}$

- $= \frac{(Z_L + Z_C)e^{j\beta l} + (Z_L - Z_C)e^{-j\beta l}}{(Z_L + Z_C)e^{j\beta l} - (Z_L - Z_C)e^{-j\beta l}}$

- $= \frac{Z_L(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}) + Z_C(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l})}{Z_L(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l}) + Z_C(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l})}$

- $\overline{Z}_{in}(l) = \frac{Z_L 2 \cos \beta l + Z_C 2j \sin \beta l}{Z_L 2j \sin \beta l + Z_C 2 \cos \beta l}$

- Division durch $\cos \beta l$

- $\overline{Z}_{in}(l) = \frac{Z_L + j Z_C \tan \beta l}{Z_C + j Z_L \tan \beta l}$

- Ergebnis beschreibt Transformation der Lastimpedanz Z_L durch Länge der Leitung l mit charakteristischer Impedanz Z_C

Spezialfälle

- Kurzgeschlossene Leitung $Z_L = 0$
  $\overline{Z}_{in}(l) = j \tan(\beta l)$

- Leerlaufende Leitung $Z_L = \infty$
  $\overline{Z}_{in}(l) = \frac{1}{j \tan \beta l}$

- Angepasste Leitung $Z_L = Z_C$
  $\overline{Z}_{in}(l) = 1$
  Die Eingangsimpedanz einer perfekt abgeschlossene Leitung ist unabhängig vom Ort immer gleich der charakteristischen Impedanz der Leitung.

An die Last übertragene Leistung bei Fehlanpassung

- Leistung in der Last $P_L = \frac{1}{2}\Re(U_L I_L^*) = \frac{1}{2}\Re\{(U^+ + U^-)(I^+ - I^-)^*\}$

- $P_L = \frac{1}{2}\Re\{(U^+ + U^-)Y_C(U^+ - U^-)^*\}$

- $P_L = \frac{1}{2}|U^+|^2 Y_C \Re\{(1 + \Gamma_L)(1 - \Gamma_L^*)\}$

- $P_L = \frac{1}{2}|U^+|^2 Y_C(1 - |\Gamma_L|^2) = \frac{1}{2}|U^+|^2 Y_C(1 - \rho^2)$

Maximal übertragbare Leistung bei Fehlanpassung

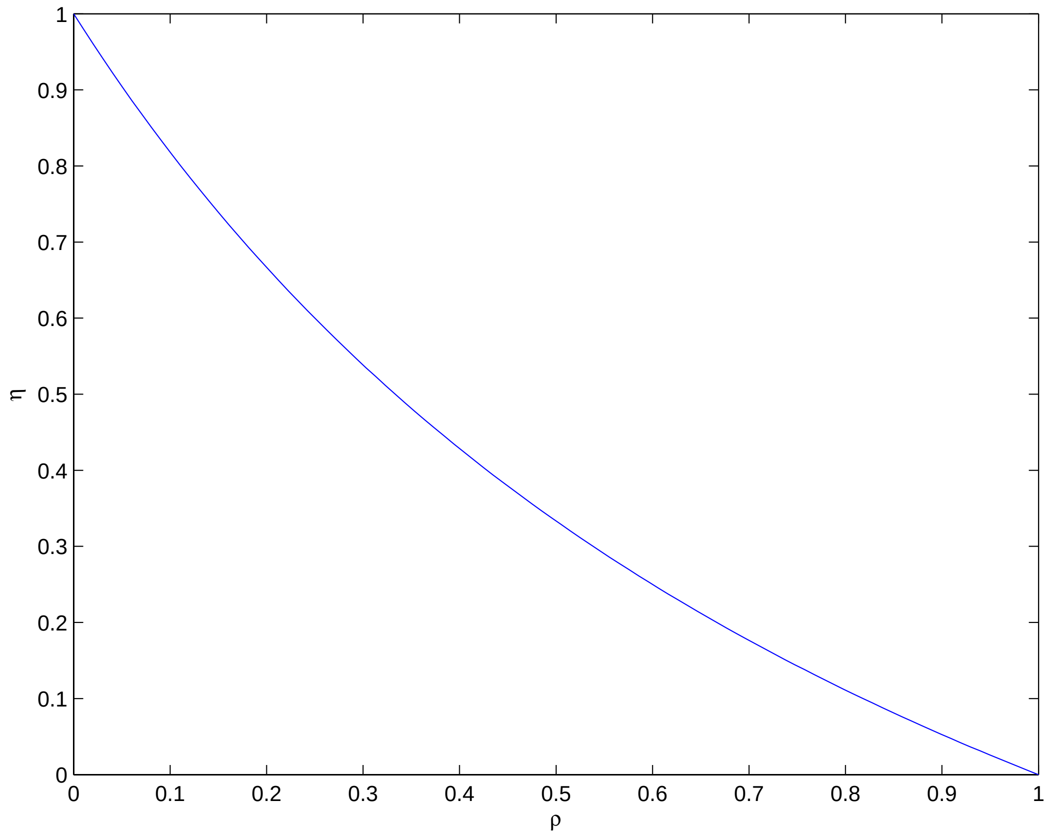
- begrenzte Spannungsfestigkeit der Leitung $U_{max} \geq (1+\rho)|U^{+}|$

- maximale vom Generator einzuspeisende Spannung $|U^{+}| = \frac{U_{max}}{1+\rho}$

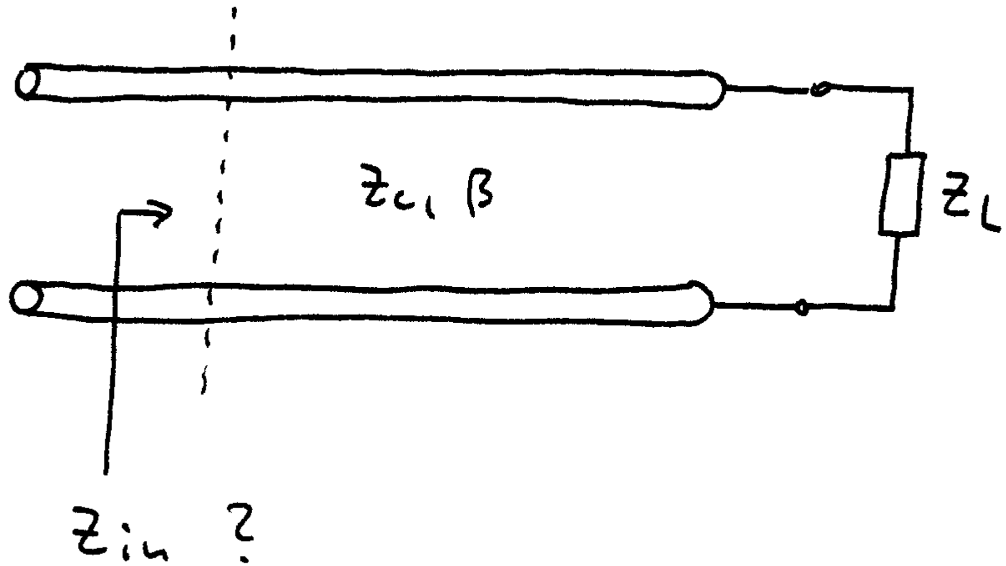
- maximal zur Last übertragbare Leistung $P_{L,max} = \frac{Y_C}{2}(1-\rho^2)\frac{U_{max}^2}{(1+\rho)^2}$

- Gesamtwirkungsgrad $\eta = \frac{P_{L,max}}{P_{max}} = \frac{1-\rho^2}{(1+\rho)^2}$

Gesamtwirkungsgrad vs. Betrag des Reflexionskoeffizienten



Das Smith - Diagramm



Wie hängen die Eingangsimpedanz $Z_{in}(l)$ und $\Gamma(l)$ zusammen ?

Schritte der Impedanztransformation

- $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{\frac{Z_L}{Z_C} - 1}{\frac{Z_L}{Z_C} + 1}$

- normierte Eingangsimpedanz $\overline{Z}_L = \frac{Z_L}{Z_C}$

- $\Gamma_L = \frac{\overline{Z}_L - 1}{\overline{Z}_L + 1}$

- ortsabhängiger Reflexionskoeffizient $\Gamma(l) = \Gamma_L e^{-2j\beta l}$

Smith-Diagramm: Übergang von der Impedanz in die Γ- Ebene und umgekehrt

- $\overline{Z}_{in}(l) = \frac{1+\Gamma(l)}{1-\Gamma(l)} = \frac{Z_{in}}{Z_C}$

- Bilineare Transformation
  $\Gamma = u + jv = \frac{\overline{Z}-1}{\overline{Z}+1} = \frac{\overline{R}-1+j\overline{X}}{\overline{R}+1+j\overline{X}}$

- Trennen von Real- und Imaginärteil
  $(u + jv)(\overline{R} + 1 + j\overline{X}) = \overline{R} - 1 + j\overline{X}$
  $u(\overline{R} + 1) - v\overline{X} + jv(\overline{R} + 1) + j\overline{X}u = \overline{R} - 1 + j\overline{X}$

- Realteil $u(\overline{R}+1) - v\overline{X} = \overline{R} - 1$

- Imaginärteil $v(\overline{R}+1) + u\overline{X} = \overline{X}$

- Bilineare Transformationen bilden Kreise (oder Geraden) auf Kreise (oder Geraden) ab. Geraden sind dabei der Sonderfall eines Kreises mit $r = \infty$.

Abbildung einer Impedanz mit konstantem Realteil $\overline{R}$ in die Γ Ebene

- $\overline{X}$ eliminieren
- Gleichung für Imaginärteil
  $v(\overline{R}+1)+u\overline{X}=\overline{X}$
- $\overline{X}(1-u)=v(\overline{R}+1)$
- $\overline{X}=\frac{v(\overline{R}+1)}{(1-u)}$

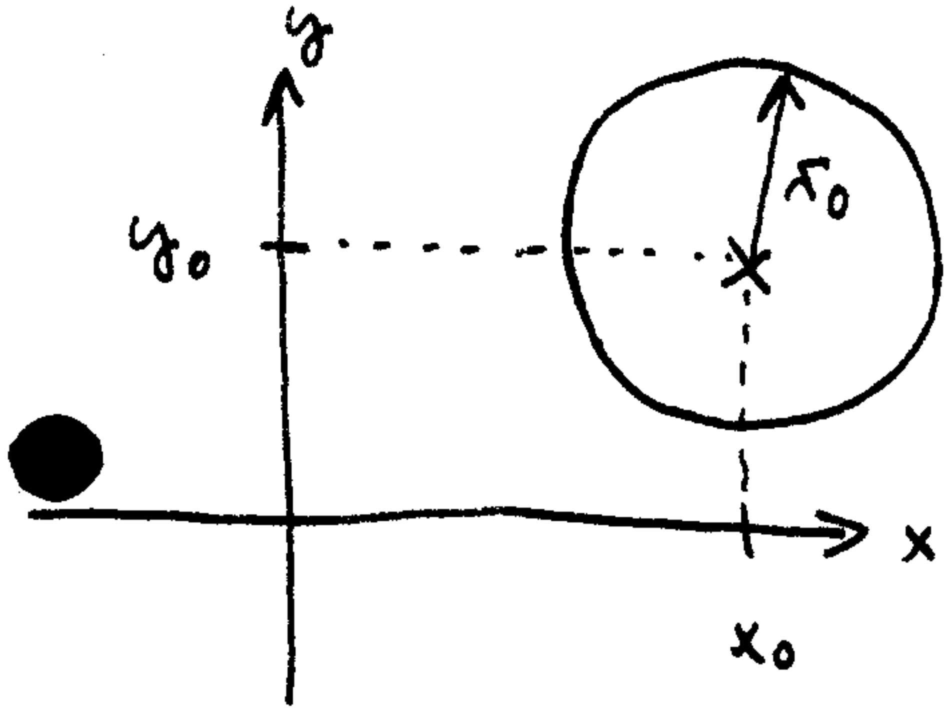
- Gleichung für Realteil
  $u(\overline{R}+1) - v\overline{X} = \overline{R} - 1$

- $u(\overline{R}+1) - v\frac{v(\overline{R}+1)}{(1-u)} = \overline{R} - 1$

- $u(1-u)(\overline{R}+1) - v^2(\overline{R}+1) = (1-u)(\overline{R}-1)$
  $-(u^2+v^2)(\overline{R}+1) + u(\overline{R}+1+\overline{R}-1) + 1 - \overline{R} = 0$

- $u^2 + v^2 - u\frac{2\overline{R}}{\overline{R}+1} + \frac{\overline{R}-1}{\overline{R}+1} = 0$
  Diese Gleichung müssen alle Reflexionskoeffizienten $\Gamma = u + jv$ für einen konstanten Realteil der Impedanz erfüllen. ($\overline{R}$ ist Parameter)

Kreisparameter - Radius r_0, Mittelpunktskoordinaten x_0, y_0



Kreisgleichung

- $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r_0^2$
- $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r_0^2) = 0$
- $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
- $x_0 = -\frac{1}{2}a,\ y_0 = -\frac{1}{2}b,\ r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - c}$

Extraktion der Kreisparameter für konstanten Realteil durch Koeffizientenvergleich

- $u_0 = \frac{\overline{R}}{\overline{R}+1}$, $v_0 = 0$
- $r_0 = \sqrt{\frac{\overline{R}^2}{(\overline{R}+1)^2} - \frac{\overline{R}-1}{\overline{R}+1}}$
- $r_0 = \sqrt{\frac{\overline{R}^2-\overline{R}^2+1}{(\overline{R}+1)^2}}$
- $r_0 = \frac{1}{1+\overline{R}}$

Wichtige Fälle

- Kurzschluss $\overline{R} = 0$, $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $r_0 = 1$
- Leerlauf $\overline{R} = \infty$, $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $r_0 = 0$
- Anpassung $\overline{R} = 1$, $u_0 = \frac{1}{2}$, $v_0 = 0$, $r_0 = \frac{1}{2}$

Kreise für konstanten Realteil

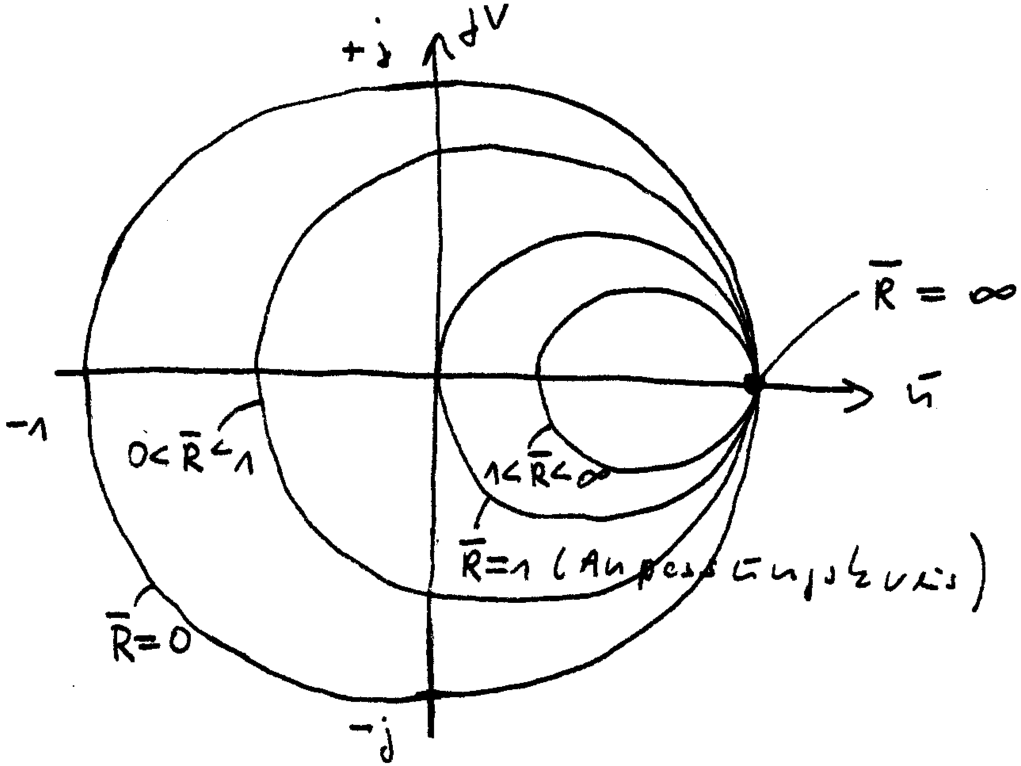


Abbildung einer Impedanz mit konstantem Imaginärteil $\overline{X}$ in die Γ Ebene

- $\overline{R}$ eliminieren
- Gleichung für Imaginärteil
  $v(\overline{R}+1)+u\overline{X}=\overline{X}$
- $v\overline{R}=\overline{X}(1-u)-v$
- $\overline{R}=\frac{\overline{X}(1-u)}{v}-1$

- Gleichung für Realteil
$u(\frac{\overline{X}(1-u)}{v} - 1 + 1) - v\overline{X} = (1-u) - 2\frac{v}{\overline{X}}$

- $u^2 + v^2 - 2u - 2\frac{v}{\overline{X}} + 1 = 0$

- Extraktion der Parameter
$u_0 = 1,\ v_0 = \frac{1}{\overline{X}},\ r_0 = \sqrt{1 + \frac{1}{\overline{X}^2} - 1} = \frac{1}{|\overline{X}|}$

Kreise für konstanten Imaginärteil